

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Universite Ziane Achour de Djelfa
Faculté Sciences et Technologie



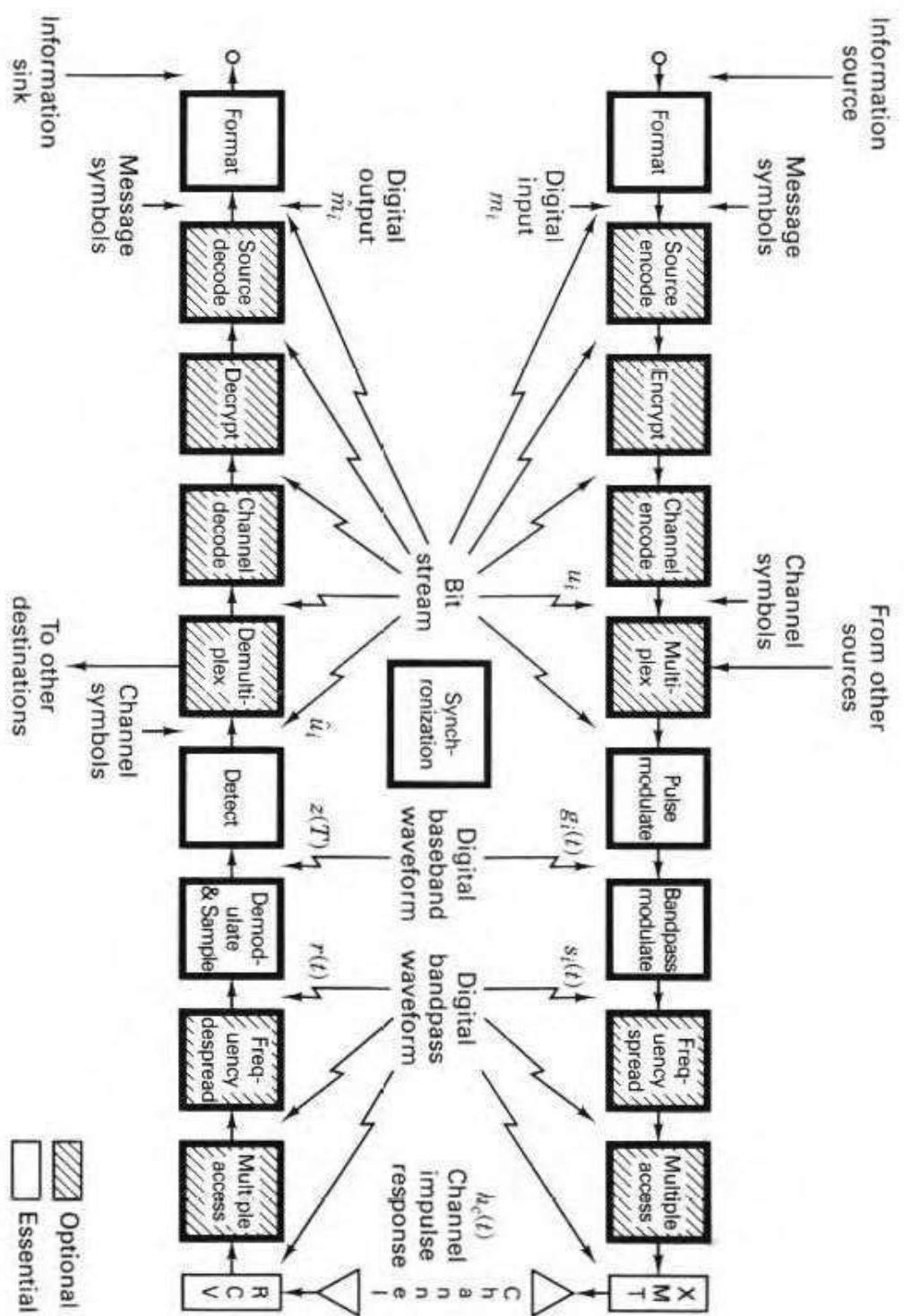
SUPPORT DE COURS
COMMUNICATION NUMERIQUE

Réalisé par : Dr. Abdelhalim RABEHI

Table de Matières

1. Généralités sur les Communications Numériques	5
1.1 Introduction	5
1.2 Critères de choix des techniques de transmission	6
1.3 Le canal de transmission.....	7
1.3.1 Canal à bruit additif	7
1.3.2 Canal à filtre linéaire	7
1.3.3 Canal non linéaire.....	8
1.4 Définition du bruit.....	9
1.4.1 Les différents types de bruit.....	11
1.4.2 Modélisation du bruit blanc gaussien (loi normale) dans un canal de transmission (Additive White Gaussian Noise AWGN)	13
1.5 Définitions et appellations	15
1.5.1 Signal numérique.....	15
1.5.2 Symbole et transmission M-aire.....	15
1.5.3 Efficacité spectrale	16
1.5.4 Fonction d'erreur et de la fonction d'erreur complémentaire.....	16
1.5.5 Le taux d'erreur binaire TEB	17
1.6 Limite théorique du débit de transmission.....	17
1.6.1 Premier critère de Nyquist (Canal sans bruit)	17
1.6.2 Limite fondamentale : formule de Shannon	20
2. Transmission en Bande de Base sur Canal Idéal	22
2.1 Introduction	22
2.2 Critère de choix des codes en ligne	23
2.3 Densité spectrale de puissance d'un code en ligne (formule de Bennett).....	23
2.4 Les codes en lignes à symboles indépendants	25
2.4.1 Code NRZ binaire (non-retour à zéro)	25
2.4.2 Code retour à zéro (RZ) unipolaire	27
2.4.3 Code retour à zéro (RZ) bipolaire	29
2.4.4 Code biphasé ou Manchester.....	30
2.5 Les codes en lignes à symboles dépendants	31
2.5.1 Code bipolaire	31
2.5.2 Code HDB3 (Haute Densité Bipolaire d'ordre 3)	32
2.6 Code NRZ M-aire	33
2.7 Transmission et détection d'un message binaire en bande de base sur un canal idéal.....	35
2.7.1 Calcul de la probabilité d'erreur	37
2.7.2 Seuil optimale.....	40
3. Transmission en Bande de Base sur Canal à Bande Limitée	41
3.1 Introduction	41
3.2 Canal à bande limitée – Problème de l'IES.....	41

3.3 Condition temporelle d'absence D'ISI	43
3.4 Condition spectrale d'absence D'ISI.....	44
3.5 Filtre en cosinus surélevé	46
3.6 Diagramme de l'œil	48
4. Détection Optimale	50
4.1 Introduction	50
4.2 Détection d'un signal binaire et test des hypothèses.....	50
4.3 Probabilité d'errer et détecteur de maximum de vraisemblance.....	51
4.3.1 Probabilité d'errer	51
4.3.2 Détecteur au maximum de vraisemblance	52
4.3.3 Probabilité d'erreur en présence d'un bruit gaussien	52
4.4 Détection optimale	54
4.4.1 Filtre adapté	54
4.4.2 Corrélateur	55
4.4.3 Détection optimale.....	56
4.5 Evaluation de la probabilité d'erreur dans un système de transmission binaire	56
4.5.1 Signal bande de base unipolaire.....	57
4.5.2 Signal bande de base bipolaire.....	57
4.5.3 Signal en modulation d'amplitude	57
4.5.4 Signal en modulation de phase	57
4.5.5 Signal en modulation de fréquence	58
5. Transmission sur onde porteuse.....	59
5.1 Introduction	59
5.2 Définition du modulation et démodulation	60
5.3 Expression du signal modulé.....	61
5.4 Modulation par déplacement d'amplitude	63
5.4.1 Modulation par tout ou rien (B-ASK unipolaire)	64
5.4.2 Modulations à « M-états »	66
5.5 Modulation par déplacement de phase (MDP).....	69
5.5.1 Modulation MDP-2	71
5.5.2 Modulation MDP-4	74
5.5.3 Spectre et efficacité spectrale du Modulation MPSK.....	78
5.5.4 Les performances du modulation MPSK	78
5.6 Modulation d'amplitude sur deux porteuses en quadrature (MAQ).....	79
Les performances du modulation QAM	81
5.7 Modulation par déplacement de fréquence (MDF)	82
5.7.1 La modulation MDF à phase discontinue	83
5.7.2 La modulation MDF à phase continue MDF-PC.....	84
5.7.4 Conclusion	85
Références bibliographiques.....	86



1. Généralités sur les Communications Numériques

1.1 Introduction

Les systèmes de transmission numérique véhiculent de l'information entre une source et un destinataire en utilisant un support physique comme le câble, la fibre optique ou encore, la propagation sur un canal radioélectrique. Les signaux transportés peuvent être soit directement d'origine numérique, comme dans les réseaux de données, soit d'origine analogique (parole, image...) mais convertis sous une forme numérique.

La tâche d'un système de transmission est d'acheminer l'information de la source vers le destinataire avec le plus de fiabilité possible. Le schéma synoptique d'un système de transmission numérique est donné à la figure (I.1). On se limite aux fonctions de base :

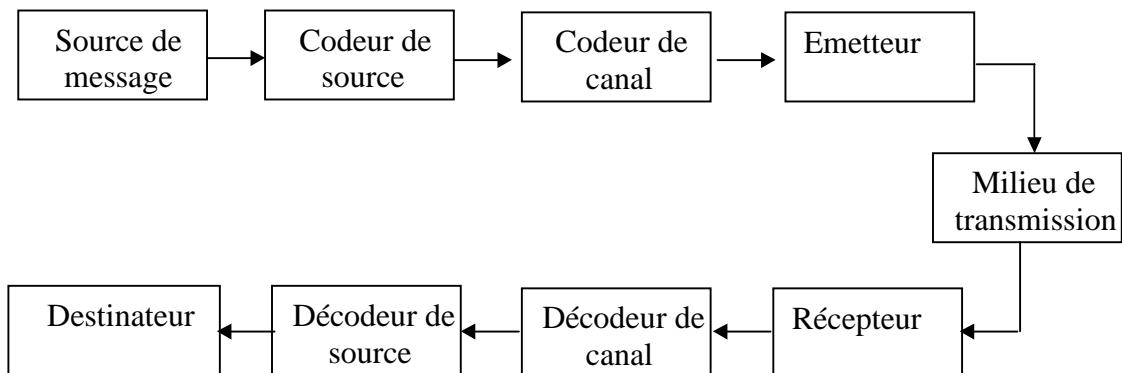


Figure 1.1- Principe d'une chaîne de transmission numérique

- La source émet un message numérique sous la forme d'une suite d'éléments binaires aléatoires α_k .
- Le codeur de source supprime les éléments binaires non significatifs (Compression de données ou codage de source).
- Le codeur canal introduit de la redondance dans l'information en vue de la protéger contre le bruit présent sur le canal de transmission. Le codage de canal n'est possible que si le débit de la source est inférieur à la capacité du canal de transmission.

1. Généralités sur les Communications Numériques

- Le rôle de l'émetteur est d'associer, à chaque élément constituant le message numérique un signal analogique à temps continu $x(t)$. Son rôle est d'adapter le spectre du signal au canal (milieu physique) sur lequel il sera émis. On distingue, une transmission dite en bande de base si le support de transmission utilisée est filaire et une modulation sur onde porteuse si la liaison est hertzienne dont elle nécessite des antennes en émission et en réception.
- Enfin, du côté récepteur, les fonctions de démodulation et de décodage sont les inverses respectifs des fonctions de modulation et de codage situés du côté émetteur. Le récepteur comprend des circuits d'amplification, de changement de fréquence, de démodulation de filtrage, et de décision.

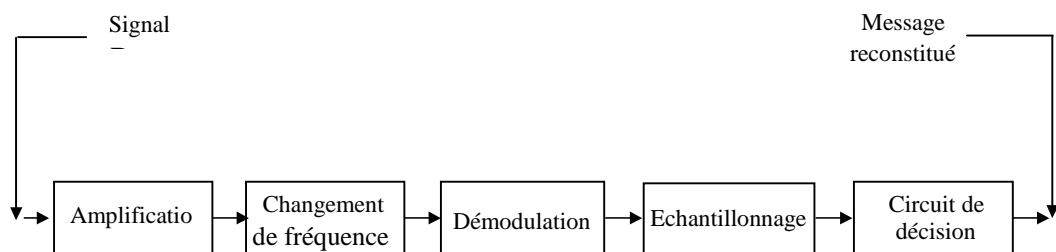


Figure 1.2- Schéma d'un récepteur pour transmission sur onde porteuse

1.2 Critères de choix des techniques de transmission

Les trois caractéristiques principales permettant de comparer entre elles les différentes techniques de transmission sont les suivantes :

- La probabilité d'erreur P_e par bit transmis permet d'évaluer la qualité d'un système de transmission. Elle est fonction de la technique de transmission utilisée, mais aussi du canal sur lequel le signal est transmis. En pratique, elle est estimée par le Taux d'Erreur par Bit 'TEB'.
- L'occupation spectrale du signal émis doit être connue pour utiliser efficacement la bande passante du canal de transmission. On est contraint d'utiliser de plus en plus des Modulations à grande efficacité spectrale.
- La complexité du récepteur est le troisième aspect important d'un système de transmission.

1.3 Le canal de transmission

Il peut inclure le milieu de transmission, le bruit, mais aussi le filtre d'émission placé physiquement dans l'émetteur, ainsi que les antennes d'émission et de réception en espace libre.

La modélisation du milieu de transmission peut être très complexe. Le milieu peut se comporter comme un simple filtre linéaire, de réponse en fréquence $H(f)$, mais aussi être non stationnaire (la réponse $H(f)$ est alors fonction du temps) ou présenter des non linéarités ou encore un effet Doppler.

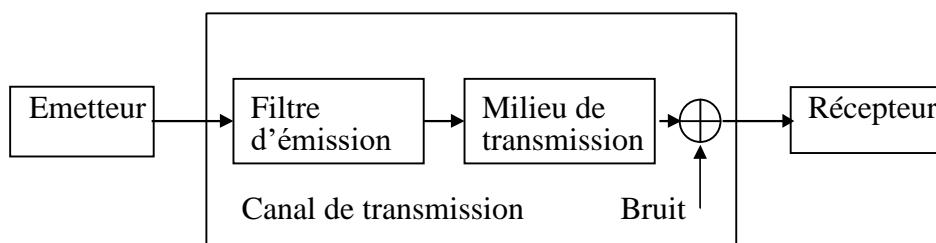


Figure 1.3- canal de transmission

1.3.1 additif(AWGN)

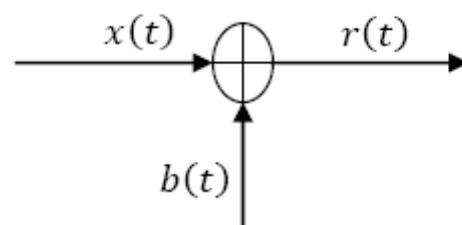
Canal à bruit

Le modèle mathématique le plus simple d'un canal de communication est le canal à bruit additif où le signal transmis est perturbé par un bruit blanc additif $b(t)$ (AWGN) comme illustré sur la figure (1.4).

Le signal à la sortie du canal est donné par :

$$r(t) = x(t) + b(t)$$

Une mesure de qualité de transmission est donnée par le rapport signal sur bruit.



$$SNR = \frac{E[x(t)^2]}{E[b(t)^2]}$$

Figure 1.4- Canal AWGN simple

1.3.2 Canal à filtre linéaire

Le modèle du canal à filtre linéaire avec un bruit blanc gaussien additif est représenté par la figure (1.5). Le signal à la sortie du canal est donné par :

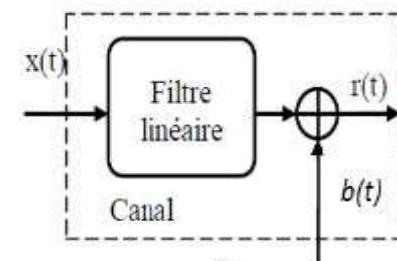


Figure 1.5- Canal AWGN à filtre linéaire

$$r(t) = x(t) * h(t) + b(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau + b(t)$$

$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du canal et (*) représente le produit de convolution.

1.3.3 Canal non linéaire

Il existe autre type de canaux non linéaire comme les canaux multi-trajet et les canaux radio mobile ou à effet Doppler.

Le phénomène multi-trajet se produit lorsqu'un signal radio émis se propage par plusieurs chemins et est reçu sur une antenne. Les causes de l'atténuation multi-trajet sont la réflexion sur l'ionosphère, réfraction, réflexion et diffraction par les obstacles naturels ou des bâtiments.

La réponse impulsionnelle du canal est :

$$h(t, \tau) = \sum_{n=0}^{N(t)} \alpha_n(t) \exp^{-j\varphi_n(t)} \delta(t - \tau_n(t))$$

$\alpha_n(t)$: l'atténuation engendré par le multi-trajet.

$\varphi_n(t)$: la phase du multi-trajet.

$\tau_n(t)$: l'étalement engendré par le multi-trajet.

$N(t)$: le nombre de trajet.

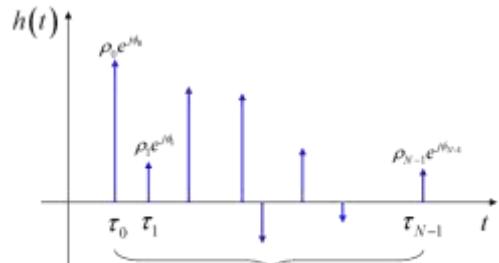
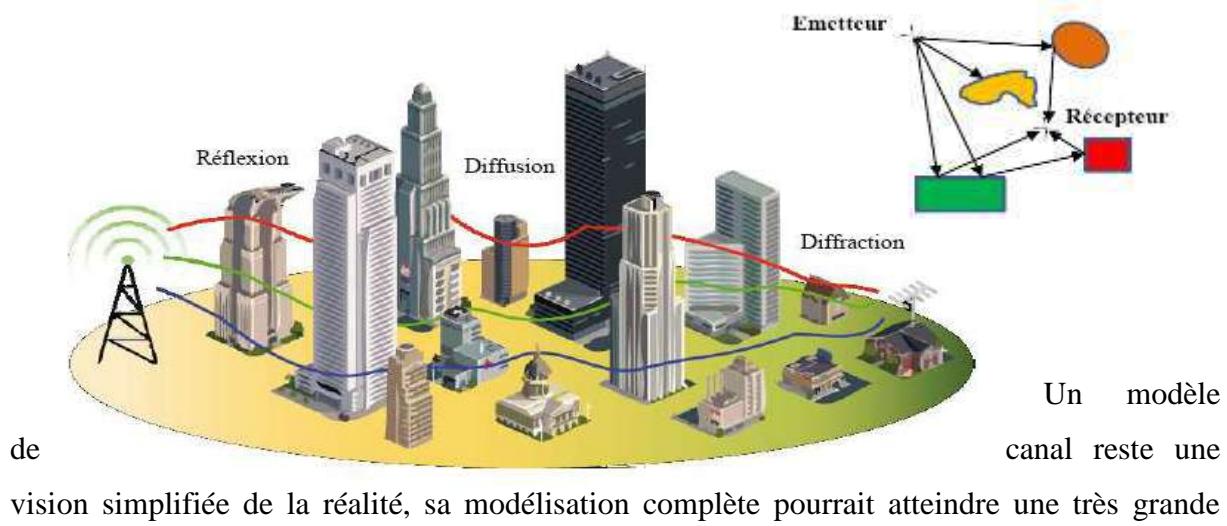


Figure 1.6- réponse impulsionnel d'un canal multi-trajet

L'effet Doppler, est le décalage de la fréquence (f_d) de l'onde porteuse observé lorsque l'émetteur ou le récepteur sont en mouvement, cette canal est parfois dite canal radio mobile.



- Canal discret : l'ensemble des symboles reçus après le passage dans le canal est fini. L'information est donc numérique.
- Canal sans mémoire : le symbole reçu à un instant donné dépend uniquement du symbole émis au même instant t (en considérant le retard de transmission nul). Si le canal a une mémoire, la sortie dépend aussi des symboles présents en t' , $t' < t$.
- Canal stationnaire (invariante) : ses caractéristiques sont fixes au cours du temps ($h(t)$ est constant). Une fibre optique est un canal stationnaire, ses caractéristiques étant quasi invariantes au cours du temps, alors qu'une liaison radio correspond à un canal non stationnaire puisque ses caractéristiques dépendent de nombreux facteurs tels que les objets environnants, les conditions atmosphériques ou les perturbations électromagnétiques.
- Canal sélectif : le signal à transmettre à des composantes fréquentielles qui sont atténuées différemment par le canal de propagation. Il introduit donc une distorsion dans le signal transmis.
- Canal sélectif en fréquence : si sa réponse temporelle est variante : $h(t) = fct(t, f_d)$
- Canal sélectif en temps : $h(t) = fct(t, \tau)$
- Canal variant en temps et en fréquence : $h(t) = fct(t, f_d, \tau)$.

1.4 Définition du bruit

1. Généralités sur les Communications Numériques

Les signaux utiles sont souvent mélangés à du bruit. Le bruit est par définition un signal parasite aléatoire, le plus souvent d'origine thermique. Tout signal de fréquence f dont l'amplitude est inférieure ou égale à celle du bruit, ou sous le seuil de bruit, à la fréquence f ne pourra être différencié du bruit par un dispositif électronique de réception (figure 1.8). Au cours du dimensionnement d'un canal de transmission, il faudra tenir compte du niveau de bruit afin de définir la sensibilité du récepteur. Le bruit peut être caractérisé de plusieurs manières :

- Par sa densité spectrale de puissance (**dsp**) (Figure 1.8), c'est-à-dire la répartition énergétique en fonction de la fréquence (puissance par hertz). La quantité totale de bruit sur une bande de fréquence donnée (par exemple la puissance) est égale à l'intégrale de la DSP sur cette bande de fréquence.
- Par sa fonction de répartition ou densité de probabilité en amplitude(**ddp**)(Figure 1.9), et aussi par différentes valeurs statistiques comme sa valeur moyenne et sa variance. En effet, comme le bruit est généralement aléatoire, celui est vu comme un signal aléatoire. En appliquant un modèle de distribution du bruit (distribution normale, log normale, gaussienne ...ect), il est possible d'estimer l'amplitude maximale prise par le bruit. Les caractéristiques statistiques du bruit sont généralement données par la valeur moyenne (m_y) et par l'écart type ou variance (σ_b^2).

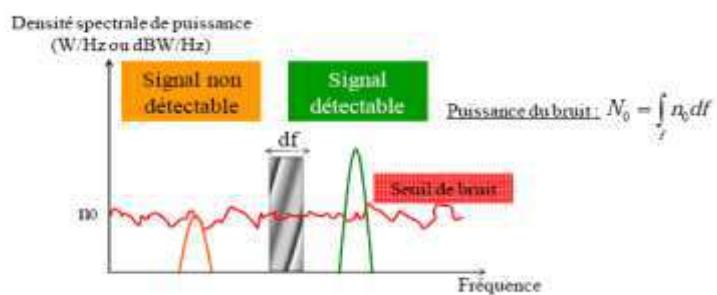


Figure 1.8 - Représentation de la densité spectrale de puissance du bruit et d'un signal, et détection d'un

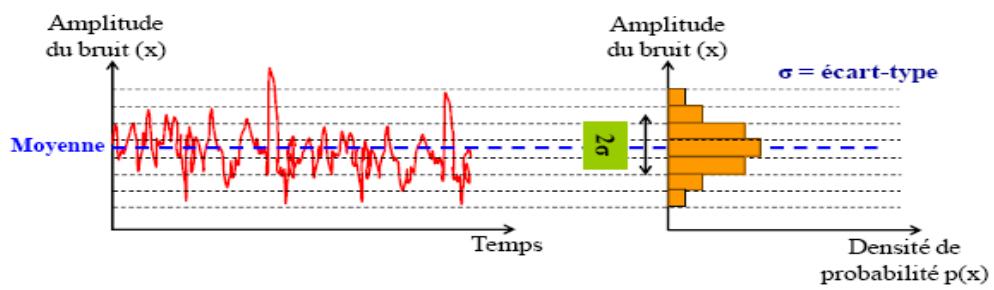


Figure 1.9- Caractérisation statistique du bruit

1.4.1 Les différents types de bruit

1.4.1.a Bruit Johnson

Toute résistance, même si elle n'est pas parcourue par un courant, produit à ses bornes une tension de bruit appelée bruit Johnson. Ce bruit est produit par l'agitation thermique aléatoire des électrons. Ce bruit possède un spectre plat, c'est à dire que la puissance du bruit est constante avec la fréquence. On parle alors de bruit blanc. Son amplitude dépend de la valeur de la résistance et de la température ambiante. La tension efficace de bruit aux bornes d'une résistance (R) et sa densité spectrale de puissance peuvent se calculer par les équations suivantes :

$$V_b = 2\sqrt{KTRB}$$

$$DSP_b = 2KTR$$

R = résistance du conducteur (Ohm)

$k=1.38 \times 10^{-23}$ Joule/°K, constante de Boltzmann

T = température du matériau (°K)

B = largeur de bande (Hz).

Comme le bruit est un phénomène aléatoire, l'amplitude du bruit Johnson est imprévisible mais suit une loi gaussienne.

1.4.1.b Bruit de grenaille

Un courant électrique peut être comparé à un flux de charges discrètes de charges constantes. Un courant est composé d'éléments finis qui connaissent des fluctuations statistiques. La fluctuation du courant est donnée par l'équation suivante :

$$I_b = \sqrt{2KIB}$$

$q=1.6 \times 10^{-19}$ C charge d'un électron

I = amplitude du courant continu

B = largeur de bande (Hz)

Les fluctuations relatives du courant sont d'autant plus importantes que le courant est faible. Comme le bruit Johnson, il s'agit d'un bruit blanc gaussien. Cette formule est particulièrement valable dans une jonction PN.

1.4.1.c Bruit en 1/f ou bruit de scintillement

Alors que les bruits Johnson et de grenaille sont des phénomènes irréductibles liés à des phénomènes physiques, les composants réels ont une source de bruit supplémentaire ayant plusieurs origines liées à leur fabrication (nature du matériau, résistif par exemple). Ainsi, les résistances sont affectées de variations de résistance proportionnelles au courant qui les traversent produisant des fluctuations de tension à leurs bornes. Le spectre de ce bruit suit à peu près une loi en $1/f$, sa densité de puissance est donc divisée par 10 à chaque décade de fréquence. On appelle aussi ce bruit le bruit rose.

1.4.1.d Autres sources de bruit

Les sources de bruit sont très nombreuses. On peut trouver par exemple :

- Les antennes d'émission et de réception, peuvent être des sources de bruit qualifié externe à cause de sa fonction première : capturer des ondes électromagnétiques. En effet, une antenne est susceptible de capter l'ensemble des signaux parasites produits par son environnement (autre utilisateur de milieu : interférences électromagnétiques)
- Les rayonnements cosmiques qui sont des événements localisés et de haute énergie.

1.4.1.d Autres sources de perturbation

Le comportement non linéaire des circuits électroniques actifs peut dégrader les performances du système de communications en modifiant certains paramètres tels que le gain des étages d'amplification ou en créant des signaux parasites. Les lois non linéaires apparaissent alors comme des polynômes d'ordre 2 ou 3 enrichissant aussi le spectre du signal de sortie de nouvelles composantes spectrales nuisibles. On distingue plus particulièrement, la distorsion harmonique et d'intermodulation.

L'Affaiblissement de parcours en propagation hertzienne atténue aussi les ondes. En effet, la puissance transportée par les ondes par unité de surface décroît avec la distance et la fréquence (la formule de Friis) .

Le brouillage ou interférences sont aussi des signaux parasites de puissance non négligeable émis à la même fréquence que le signal utile. Ils peuvent perturber la

1. Généralités sur les Communications Numériques

transmission sur le canal, endégradant le rapport signal à bruit ou en introduisant des distorsions. On trouve deux types d'interférences :

-L'interférence due à la présence simultanée d'autres utilisateurs soit sur le même canal de transmission (mauvais duplex, interférences entre utilisateurs), soit sur des canaux adjacents

(la largeur de bande du canal adjacent ne respecte pas les contraintes fixées).

-Le brouillage intentionnel (activité militaire, volonté de perturber une communication gênante). La technique revient à placer à proximité de l'utilisateur une source haute puissance et de la faire émettre à la fréquence du canal. Seules les communications radio peuvent être brouillées, les communications par fibre optique restent inviolables.

1.4.2 Modélisation du bruit blanc gaussien (loi normale) dans un canal de transmission (Additive White Gaussian Noise AWGN)

Le bruit blanc gaussien est un modèle de bruit largement utilisé dans de nombreux domaines. En effet, lorsqu'un phénomène correspond à la somme d'un grand nombre de variables aléatoires, il est possible de démontrer par le théorème de la limite centrale que la distribution statistique de ce phénomène suit une distribution gaussienne.

Dans le domaine fréquentiel, un bruit blanc présente une DSP constante en fonction de la fréquence. Un bruit gaussien suit une distribution gaussienne, caractérisée par une moyenne m_b et une variance σ_b^2 (figure 1.10). La densité de probabilité est donnée par l'équation suivante :

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp^{-\left(\frac{(y-m_b)^2}{2\sigma_y^2}\right)}$$

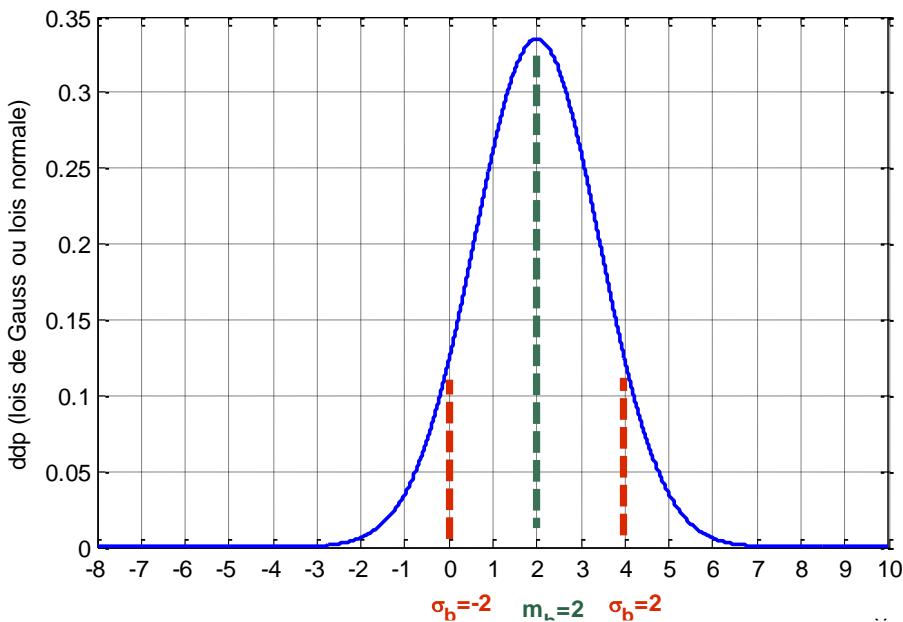


Figure 1.10- V.A (y) de ddp gaussienne de $m_b = 2$ et une variance $\sigma_b^2 = 2$

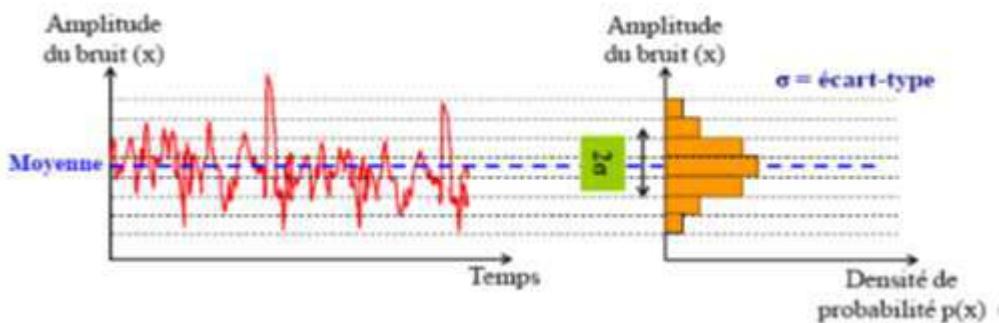


Figure 1.11- Caractérisation statistique du bruit

La figure 1.11 illustre la représentation temporelle d'un bruit gaussien et la distribution statistique qui peut en être extrait, dont la densité de probabilité suit une distribution gaussienne. La représentation temporelle ne permet pas d'extraire d'informations sur le signal en raison de sa nature aléatoire (pas de période par exemple), mais la distribution permet d'extraire des éléments statistiques sur la nature du bruit.

Un canal AWGN est non discret et sans mémoire qui représente parfaitement une liaison radio en vue directe dont le bruit est principalement d'origine thermique. Le bruit

additif est dans ce cas un bruit gaussien de moyenne nulle ($m_b = 0$) et une variance σ_b^2 . Comme il s'agit d'un bruit blanc, la densité spectrale de bruit est constante avec la fréquence, ce qui représente une hypothèse simplificatrice des calculs et mais qui reste valide si on considère des bandes de fréquence étroites.

1.5 Définitions et appellations

1.5.1 Signal numérique

Le message numérique, produit par la source, est une suite de variables aléatoires discrets α_k prenant leur valeur dans un alphabet fini. Dans le cas des messages binaires, la source est à éléments binaires indépendants et identiquement distribués (iid) sur l'alphabet $\{0,1\}$ avec des probabilités p_0 et p_1 .

Le débit de transmission binaire se mesure entre l'entrée du module de mise en forme. Il représente le nombre d'éléments binaires émis par unité de temps est défini par :

$$D_b = \frac{1}{T_b}$$

T_b est exprimé en seconde, D_b est exprimé en bit par seconde.

Exemples

La numérisation du signal de parole, est réalisée en échantillonnant le signal à la fréquence de 8 kHz, puis en codant les échantillons quantifiés sur $m = 8$ bits, Ainsi après numérisation, le signal de parole est transformé en une source numérique ayant un débit binaire de 64 k bit/s.

La figure 1.1.12 représente un signal dit NRZ pour avec un débit D_b .

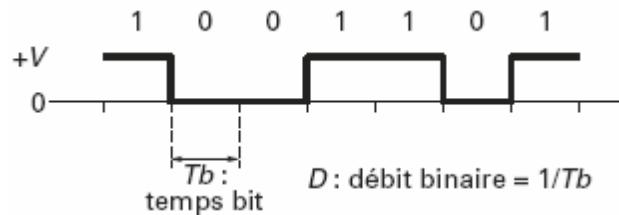


Figure 1.1.12- Représentation temporelle du signal NRZ

1.5.2 Symbole et transmission M-aire

Un symbole α_k est un élément d'un alphabet fini de taille M . le symbole est alors dit M-aire. Lorsque $M=2$, le symbole est dit binaire. En groupant, sous forme d'un bloc, n bit, on

obtient un alphabet de $M = 2^n$ symboles M-aires. Ainsi un symbole M-aire véhicule l'équivalent de $n = \log_2 M$ bits.

$$a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm (2p + 1), \dots, \pm (M - 1)\} \Leftrightarrow \begin{cases} (2i - M + 1), & i \in [1, M] \\ \text{ou } \pm (2i + 1), & i \in [0, \frac{M}{2} - 1] \\ \text{ou } \pm (2i - 1), & i \in [1, \frac{M}{2}] \end{cases}$$

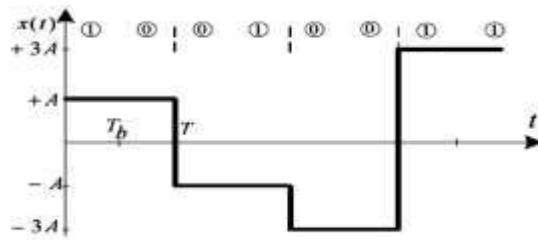


Figure 1.1.13- Signal correspondant au signal NRZ 4-aire, $T_s = 2T_b$

À présent. $T_s = nT_b = \log_2(M)T_b$ On en déduit que la vitesse de modulation ou débit symbole, qui mesure en bauds, a pour expression en fonction du débit binaire et de M :

$$R = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{nT_b} = \frac{1}{\log_2(M)} \frac{1}{T_b} = \frac{D_b}{\log_2(M)} \text{ en bauds}$$

C'est précisément pour réduire R , en augmentant la taille M de A , que l'on a introduit les modulations M -aires. La raison est que l'on espère réduire ainsi l'occupation en fréquence du signal numérique et donc de pouvoir transmettre sur un canal de bande plus étroite.

1.5.3 Efficacité spectrale

L'efficacité spectrale η est égale au rapport du débit sur la largeur de bande occupée autour de la porteuse.

$$\eta = \frac{D_b}{B} = \frac{1}{T_s B} \log_2(M)$$

Remarquons que pour B et T_s donnés, l'efficacité spectrale augmente, comme on pouvait s'y attendre, avec le nombre de bit/symbole $n = \log_2(M)$. C'est en effet la raison d'être de la modulation M-aire.

1.5.4 Fonction d'erreur et de la fonction d'erreur complémentaire

1. Généralités sur les Communications Numériques

En transmission numérique, nous avons besoin d'utiliser la fonction d'erreur $erf(x)$ et la fonction d'erreur complémentaire $erfc(x)$. Ces fonctions sont définies de la manière suivante :

$$erf(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \exp^{-u^2} du, \quad erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^{\infty} \exp^{-u^2} du$$
$$erf(x) = 2Q(x\sqrt{2}), Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp^{-\frac{u^2}{2}} du$$

1.5.5 Le taux d'erreur binaire TEB

Alors que la qualité d'un signal analogique est dégradée par toute distorsion ou atténuation non linéaire créé par le canal de transmission, la qualité d'un signal numérique ne sera réduite que si les effets négatifs du canal conduisent le récepteur à confondre plusieurs symboles ou bits dans le cas d'un signal binaire. Afin de quantifier la dégradation subie par un signal numérique ou de spécifier la qualité que doit atteindre une transmission numérique, on utilise la notion de taux d'erreur binaire ou Bit Error Rate (BER). Il s'agit du taux d'erreur mesuré à la réception d'une transmission numérique, et se calcule à l'aide de l'équation suivante :

$$TEB = \frac{\text{Nombre de bits erronée}}{\text{nombre de bits transmies}}$$

Le taux d'erreur binaire est utilisé en laboratoire pour estimer la probabilité d'erreur p_e

1.6 Limite théorique du débit de transmission

1.6.1 Premier critère de Nyquist (Canal sans bruit)

Soit un canal idéal sans bruit, on peut le représenter par un filtre passebas de largeur de bande B . Il s'agit d'un filtre passe bas idéalement sélectif, qui coupe tout ce qui ne se trouve pas dans la bande de fréquence $[-B ; B]$. Sa fonction de transfert est égale à la fonction porte, sa réponse dans le domaine temporel peut se calculer en utilisant la transformée de Fourier inverse. La réponse impulsionnelle de ce canal est un sinus cardinal.

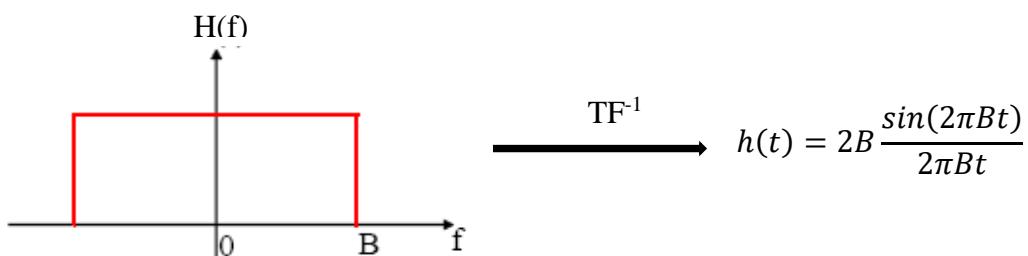


Figure 1.14- Réponse fréquentielle d'un canal idéal passe-bas

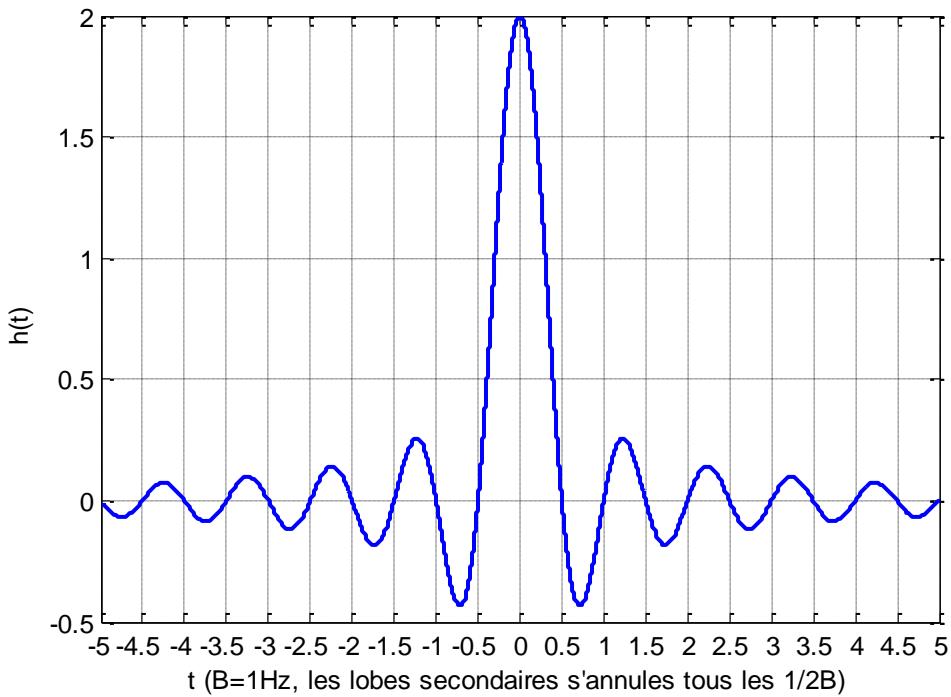


Figure 1.15- Réponse impulsionnelle d'un canal passe-bas idéal

Nyquist cherchait à déterminer quel était le débit de symbole maximal qu'on pouvait faire passer à travers ce canal. Supposons qu'on transmette des impulsions de durée très courte, suffisamment courte pour les représenter par une fonction de type Dirac $\delta(t)$.

Notons $x(t) = \delta(t)$. Le signal d'entrée du canal composé d'une impulsion. Le signal en sortie du canal $r(t)$ se calcule :

$$\begin{aligned}
 r(t) &= x(t) * h(t) \\
 r(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau) d\tau \\
 r(t) &= h(t) = 2B \sin\left(\frac{2\pi B t}{2\pi B t}\right)
 \end{aligned}$$

Le signal en sortie de ce canal a donc la forme d'un sinus cardinal, et s'annule pour les temps multiples de $1/2B$ (Figure 1.15). L'abscisse $t = 0$ correspond à l'instant où le signal est transmis.

On voit que le signal s'étale dans le temps en raison des multiples rebonds de la fonction sinc. Pour éviter tout chevauchement entre symboles consécutifs, après transmission d'un symbole, il serait nécessaire d'attendre que ces rebonds se soient fortement atténués avant d'en

1. Généralités sur les Communications Numériques

transmettre un autre. Plus on attendra et plus le débit de symbole sera limité, mais moins il y aura de risque d'interférence inter-symbole. Cependant, si on décide de transmettre un autre symbole à $t = 1/2B$, on le transmet au moment où le symbole précédent n'a plus d'influence sur ce nouveau symbole. Si on en transmet encore un autre après un temps $t = 1/2B$, les 2 symboles précédents n'auront pas d'influence non plus. Et ainsi de suite. On peut donc en déduire une condition sur le débit de symbole maximal qui peut traverser un canal idéal. La durée d'un symbole T_s doit respecter l'équation suivante :

$$T_s \geq \frac{1}{2B}$$

Et pour éviter toute erreur de transmission dans un canal idéal, le débit de symbole doit respecter l'équation suivante :

$$D_s = \frac{1}{T_s} \leq 2B$$

Inversement, si on cherche à transmettre un débit de symbole donné à travers un canal passe bas idéal, sa bande passante B doit être telle que :

$$\frac{D_s}{2} \leq B$$

Cette valeur est la bande passante minimale du canal. On l'appelle bande passante de Nyquist.

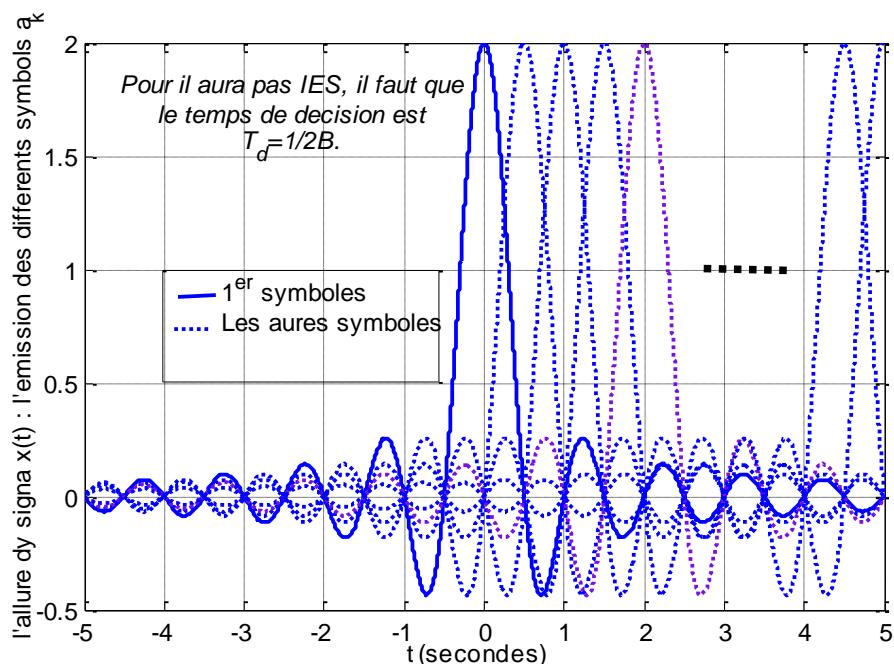


Figure 1.16- réponse temporelle d'un signal $x(t)$ respecte la condition de Nyquist.

1. Généralités sur les Communications Numériques

Comme, on peut voir sur la figure 1.16, on peut facilement détecter les différents symboles sans il aura des interférences entre symboles si la condition de Nyquist est respecté $T_s \geq \frac{1}{2B}$.

Pour résumer, le critère de Nyquist fixe une limite au débit de symboles transmis en fonction de la bande passante du canal. La bande passante du canal doit donc être choisie pour satisfaire au critère de Nyquist lorsqu'on cherche à transmettre un débit de symboles donné.

Dans le cas où l'on transmet un signal binaire (un bit est alors un symbole élémentaire), le débit binaire ne pourra jamais être supérieur à 2 fois la bande passante (ou 1.25 fois la bande passante dans le cadre du critère élargi). Cela pose un très gros souci à l'ingénieur télécom qui cherche à transmettre le débit le plus grand possible sur la bande passante la plus étroite possible. La solution est fournie par le codage. Par exemple, en codant les symboles transmis par plusieurs bits. Si un symbole est codé par n bits, alors le débit binaire maximale pouvant être transmis dans un canal idéal de bande passante B est égal à $2nB$.

Pour accroître le débit binaire dans le cas d'une transmission à bande passante limitée, il suffit donc d'accroître le nombre de symboles possibles pour augmenter le nombre de bits représenté par un symbole. Ce nombre est bien entendu limité par la quantité de bruit qui se superpose au signal reçu. Comme nous l'avons vu, le bruit limite la résolution en amplitude du canal, c'est-à-dire la capacité de différencier plusieurs symboles. La performance d'un canal en termes de débit binaire dépend donc de sa bande passante et de sa résolution en amplitude. Cette performance s'appelle capacité d'un canal.

1.6.2 Limite fondamentale : formule de Shannon

Les résultats, obtenus en 1948 par C. Shannon, ont montré que le bruit ne constituait pas une limite aux transmissions sûres, mais une *limite au débit*. En voici un énoncé :

Théorème (Canal gaussien - Shannon (1948)) Soit un canal de bande en fréquence B soumis à un bruit additif gaussien blanc et soit un rapport signal sur bruit SNR. On appelle capacité du canal gaussien la quantité mesurée en bits/s et définie par :

$$C = B \log_2(1 + SNR) \text{ (bits/s)}$$

1. Généralités sur les Communications Numériques

Alors, si le débit binaire de la source $D_b < C$ D, il existe un ensemble (modulateur/démodulateur) asymptotiquement sans erreur.

2. Transmission en Bande de Base sur Canal Idéal

Dans ce chapitre nous allons, dans un premier temps, décrire les codes en lignes utilisé pour les transmissions en bande de base, ainsi que quelques-unes de leurs propriétés les plus importante ; nous examinerons ensuite les problèmes posés par leurs transmissions sur ce que nous appellerons le « canal idéal », c'est-à-dire un canal dont la bande passante est infinie.

2.1Introduction

On distingue deux types de transmission numérique : la transmission en bande de base et la transmission par ondes modulées (on dit aussi sur porteuse). Une transmission en bande de base signifie que les symboles à émettre dans le canal de transmission ne subissent pas de translation de leur spectre autour d'une fréquence porteuse. Dans le cas d'une transmission par ondes modulées, les symboles à émettre module une porteuse de fréquence f_c (en amplitude, en phase ou par saut de fréquence). **Dans le cas d'une transmission en bande de base (Figure 2.2) et pour la distinguer d'une transmission par ondes modulées, on utilise souvent le terme codeur en ligne à la place de modulateur.**

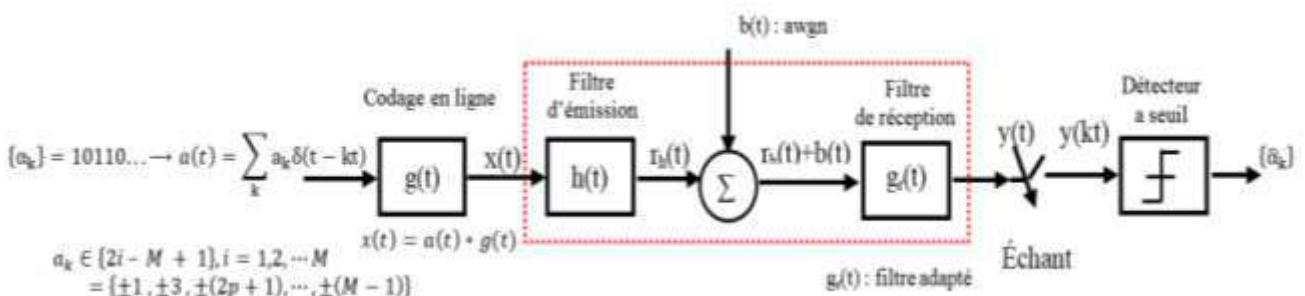


Figure 2.1- Chaine de communication en bande de base M-aire

D'une manière générale, le signal émis s'écrit de la forme suivante :

$$x(t) = a(t) * g(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_b) * g(t) = \sum_k a_k g(t - kT_b)$$

T est la durée de l'impulsion élémentaire ou durée symbole

a_k est le k^{eme} symbole à transmettre qui prend ces valeurs dans un alphabet à M éléments . $a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \pm (2p + 1), \dots, \pm (M - 1)\}$ avec $M = 2^n$ (2.2)

2.2 Critère de choix des codes en ligne

Les critères principaux pour choisir un code en ligne sont les suivants :

1. Pour les transmissions en bande de base, le milieu de transmission est constitué par un câble (bifilaire ou coaxial) est caractérisé par sa bande passante. Le code en ligne doit d'abord être choisi pour assurer la compatibilité entre le débit D à transmettre et la bande passante du milieu de transmission (choix d'un nombre d'état M).
2. Le spectre du code en ligne doit être nulle au voisinage de la fréquence zéros. Pour éviter toute interférence entre l'information utile et le courant continu utilisé par les répéteurs comme une télé-alimentation.
3. La synchronisation : pour réaliser l'opération de décodage, le récepteur a besoin de connaître le rythme de transmission, c'est à dire la fréquence, égale à $1/T$, à laquelle les symboles ont été transmis. La présence d'une raie à cette fréquence dans le spectre du code en ligne facilite la récupération du rythme de transmission en réception.
4. La résistance au bruit

Nous venons de voir que les critères de choix d'un code en ligne dépendent en partie par de ses propriétés spectrales. Il est donc nécessaire de savoir déterminer la densité spectrale de puissance ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

2.3 Densité spectrale de puissance d'un code en ligne (formule de Bennett)

Avant de donner l'expression de la densité spectrale de puissance (DSP) d'un code en ligne, remarquons que le signal $x(t)$ en sortie du codeur en ligne peut être interpréter comme le résultat du filtrage du signal $a(t)$ par un filtre dont la réponse impulsionnelle est égale à la forme d'onde $g(t)$. Reprenons l'expression (2.1) définissant le signal numérique en bande de base :

$$x(t) = a(t) * g(t)$$

La DSP $S_{xx}(f)$ du signal numérique $x(t)$ peut s'exprimer par la DSP $S_{xx}(f)$ du signal $a(t)$ par la relation :

$$S_{xx}(f) = S_{aa}(f) \cdot |G(f)|^2 \quad (2.2)$$

Où $G(f)$ est la transformée de Fourier de la forme d'onde $g(t)$,

$S_{aa}(f)$ une fonction de la fréquence qui ne dépend que des propriétés statistiques des symboles a_k , elle est définie par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$S_{aa}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.3)$$

Le calcul de la DSP $S_{aa}(f)$ du signal $x(t)$ développé dans l'annexe B, dans le cas général de symboles a_k corrélés. On obtient :

$$S_{aa}(f) = \frac{\delta_a^2}{T_b} + \frac{2}{T_b} \sum_{k=1}^{\infty} R_{xx}(k) \cos(2\pi kfT_b) + \frac{m_a^2}{T_b^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad (2.3)$$

Où m_a^2 , δ_a^2 et $R_{xx}(k)$ désignent respectivement la moyenne, la variance et la fonction d'auto corrélation

En tenant compte que du fait que le message numérique est constitué par une suite stationnaire d'élément binaires α_k stationnaire, les symboles a_k sont aussi stationnaires et nous avons :

$$\begin{cases} m_a = E[a_k] \\ \delta_a^2 = E[(a_k - m_a)^2] \\ R_{xx}(k) = E[(a_k - m_a) \cdot (a_{k-\tau}^* - m_a)] \end{cases} \quad (2.4)$$

La DSP du signal défini par l'équation (2.1) est :

$$S_{xx}(f) = S_{aa}(t) \cdot |G(f)|^2$$

$$S_{xx}(f) = \frac{\delta_a^2}{T} |G(f)|^2 + \frac{2}{T} |G(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} R_{xx}(k) \cos(2\pi kfT) + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|G\left(\frac{k}{T_b}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \quad (2.5)$$

Cette formule est souvent nommée formule de Bennet. Elle comprend une partie continue

$$S_{xx}^c(f) = \frac{\delta_a^2}{T} |G(f)|^2 + \frac{2}{T} |G(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} R_{xx}(k) \cos(2\pi kfT) \quad (2.6)$$

Et une partie discrète $S_{xx}^d(f)$: constituée par un ensemble de raie aux fréquences $\frac{k}{T}$

$$S_{xx}^d(f) = \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (2.7)$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter les codes en ligne les plus usuels.

2.4 Les codes en lignes à symboles indépendants

Pour ces codes en ligne, les symboles a_k sont indépendants et ainsi la fonction de d'autocorrélation $R_{xx}(k)$. L'expression de la DSP du signal $x(t)$ se simplifie et devient égale à

$$S_{xx}(f) = \frac{\delta_a^2}{T_b} |G(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T_b^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{k}{T_b}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (2.8)$$

Le spectre de ces codes ne dépend que de la forme d'onde $g(t)$.

2.4.1 Code NRZ binaire (non-retour à zéro)

Pour ce code, à chaque élément binaire α_k du message, on associe un symbole a_k avec :

$$\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = -1 & \alpha_k = 0 \end{cases}$$

Les symboles sont supposés équiprobables et indépendants ($p_{(a_k=1)} = p_{(a_k=0)} = \frac{1}{2}$):

$$m_a = E[a_k] = \sum_M p_{a_k} a_k = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = E[(a_k - m_a)^2] = E[a_k^2] = \sum_M p_{a_k} a_k^2 = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1) = 1$$

La forme d'onde $g(t)$ est donc une fonction porte d'amplitude A et de durée T_b .

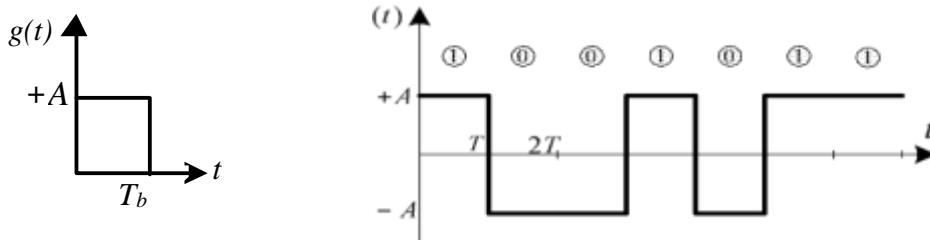


Figure 22.3- forme d'onde $g(t)$ et un signal NRZ bipolaire

$g(t)$ est une impulsion de largeur T et d'amplitude A , on a :

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi f\pi t} dt = \int_{-\frac{T_b}{2}}^{\frac{T_b}{2}} A e^{-j2\pi f t} dt = \left[-\frac{A e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f} \right]_{-\frac{T_b}{2}}^{+\frac{T_b}{2}}$$

$$= -\frac{A}{j2\pi f} (e^{-j\pi f T_b} - e^{+j\pi f T_b}) = \frac{AT_b \sin \pi f T_b}{\pi f T_b}$$

$$[G(f)]^2 = A^2 T_b^2 \left| \frac{\sin \pi f T_b}{\pi f T_b} \right|^2 = A^2 T_b^2 |\text{sinc}(f T_b)|^2$$

Finalement, on obtient donc la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$ codée en NRZ bipolaire binaire suivante :

$$S_{xx}(f) = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2(f T_b) \quad (2.8)$$

La densité spectrale de puissance du code NRZ est présentée sur les figures 2.4 et 2.5

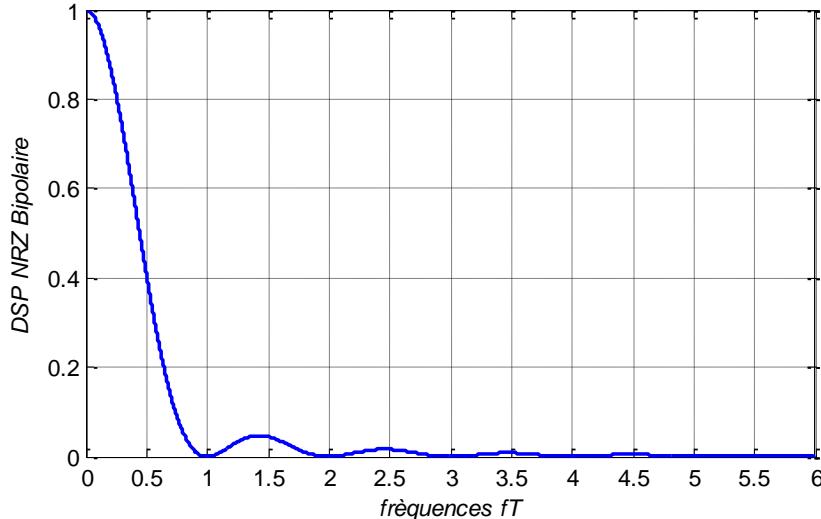


Figure 2.4- DSP du code NRZ Bipolaire (watt)

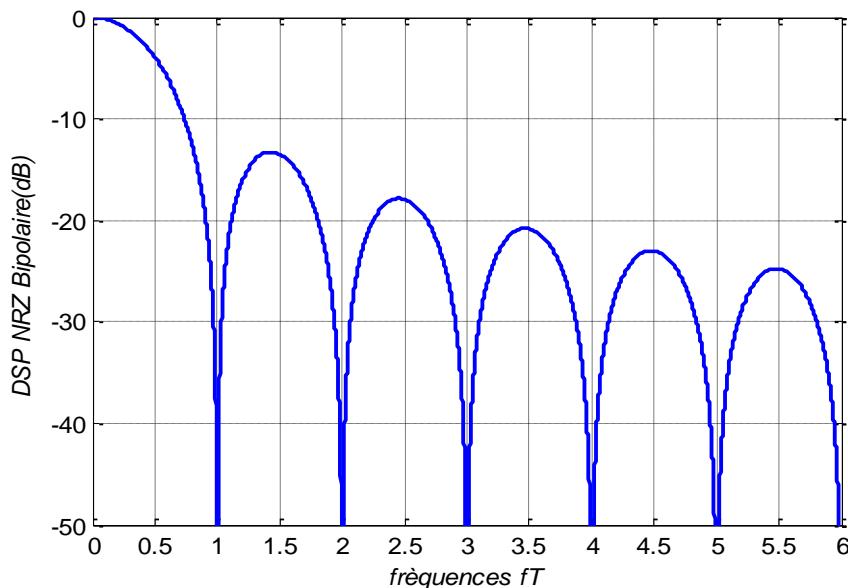


Figure 2.5- DSP du code NRZ Bipolaire (dB)

L'occupation spectrale de ce code est théoriquement infinie. Cependant, le premier lobe de la densité spectrale de puissance comprend 90% de la puissance du signal (0 à $1/T_b$). La densité spectrale de puissance s'annule à toutes les fréquences $1/T_b$.

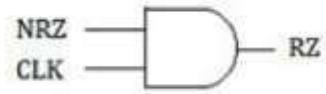
L'absence de raie à la fréquence $1/T_b$ ne permet pas d'extraire directement la fréquence rythme à la réception. En effet, les transitions sur le signal émis sont les mêmes que celles de la séquence binaire. Ainsi lors d'une longue suite de 0 ou de 1, on perd toute information de rythme.

2.4.2 Code retour à zéro (RZ) unipolaire

Ce code associe à chaque bit égal à "1" un niveau $+A$ pendant une durée $T/2$ puis un niveau 0 pendant $T/2$. A chaque bit égal à "0" est associé un niveau 0. Ce code est aussi

$$\text{appelé code RZ } 1/2. \begin{cases} a_k = 1 & \text{si } \alpha_k = 1 \\ a_k = 0 & \text{si } \alpha_k = 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} A & \forall t \in \left[0, \frac{T_b}{2}\right] \\ 0 & \forall t \in \left[\frac{T_b}{2}, T_b\right] \end{cases}$$



Les symboles sont supposés équiprobables et indépendants :

$$m_a = E[a_k] = \sum_M p_{a_k} a_k = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_a^2 = E[(a_k - m_a)^2] = \sum_M p_{a_k} \left(a_k - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

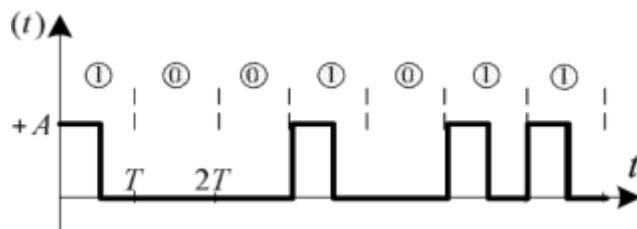


Figure 2.6- $x(t)$ codée en RZ **unipolaire**

$$G(f) = \int_0^{-\frac{T_b}{2}} A e^{-j2\pi f t} dt = \frac{AT_b}{2} \frac{\sin(\pi f \frac{T_b}{2})}{\pi f \frac{T_b}{2}}$$

$$|G(f)|^2 = \frac{A^2 T_b^2}{4} \left| \frac{\sin(\pi f \frac{T_b}{2})}{\pi f \frac{T_b}{2}} \right|^2$$

La densité spectrale de puissance du signal de ce code est constituée de deux partie continue et discrète ($m_a \neq 0$) définie par :

$$\begin{aligned}
 S_{xx}(f) &= \frac{A^2 T_b}{16} \left| \frac{\sin\left(\pi f \frac{T_b}{2}\right)}{\pi f \frac{T_b}{2}} \right|^2 + \frac{A^2}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{2}\right)}{k \frac{\pi}{2}} \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right) \\
 S_{xx}(f) &= \frac{A^2 T_b}{16} \left| \frac{\sin\left(\pi f \frac{T_b}{2}\right)}{\pi f \frac{T_b}{2}} \right|^2 + \frac{A^2}{16\pi^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \delta\left(f - \frac{(2p+1)^2}{T_b}\right) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Le spectre du signal RZ est la superposition d'un spectre continu et d'un spectre discret(harmoniques impaires de $(1/T_b)$). La raie à la fréquence $1/T_b$ permet la récupération de rythme par filtrage. Le code RZ unipolaire présente une largeur de bande double.

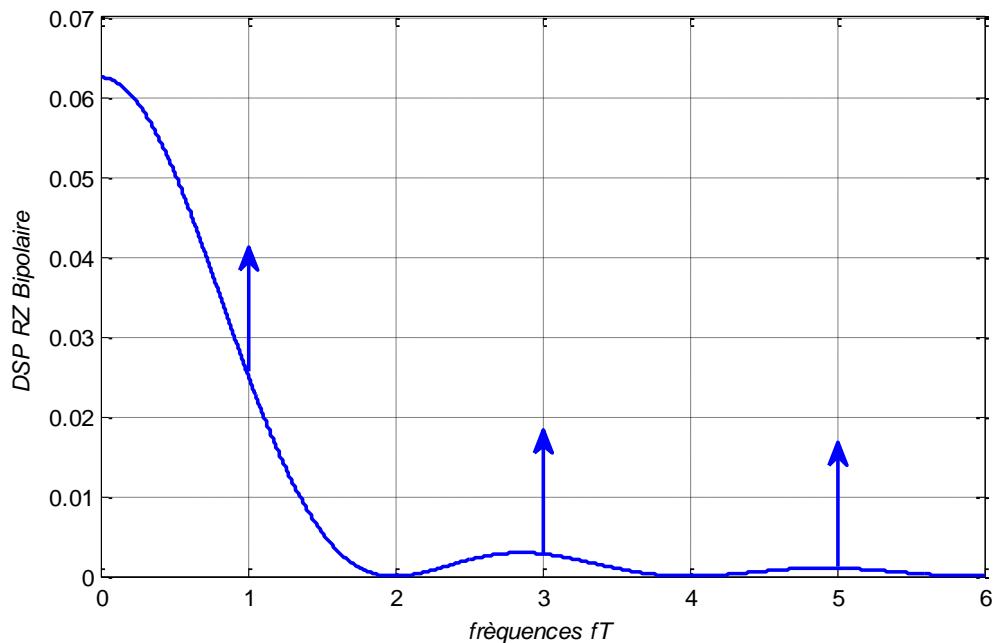


Figure 2.7- DSP RZ unipolaire (watt)

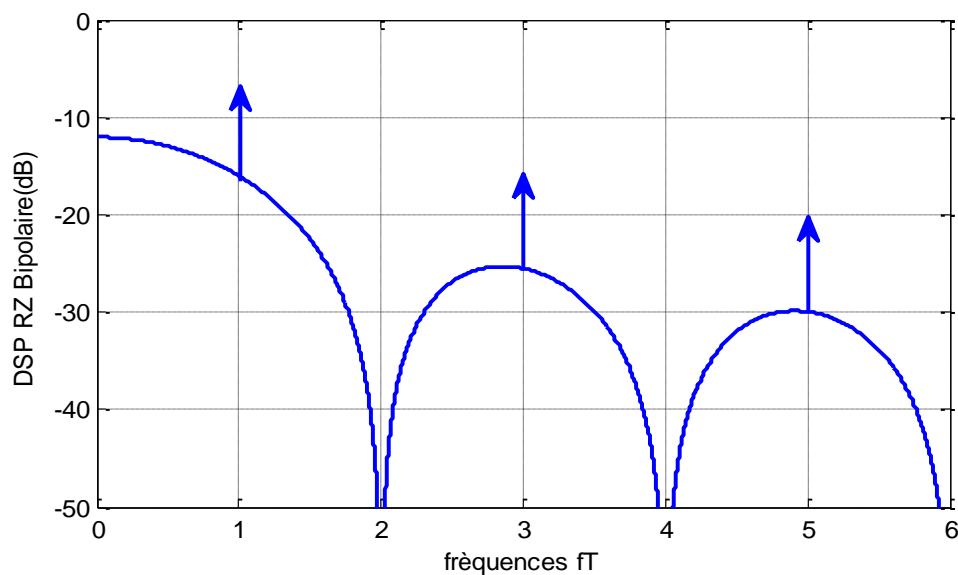


Figure 2.8- DSP RZ unipolaire (dB)

2.4.3 Code retour à zéro (RZ) bipolaire

Ce code associe à chaque bit égal à "1" un niveau $+A$ pendant une durée $T_b/2$ puis un niveau 0 pendant $T_b/2$. A chaque bit égal à "0" est associé un niveau $-A$ pendant une durée $T_b/2$ puis un niveau 0 pendant $T_b/2$.

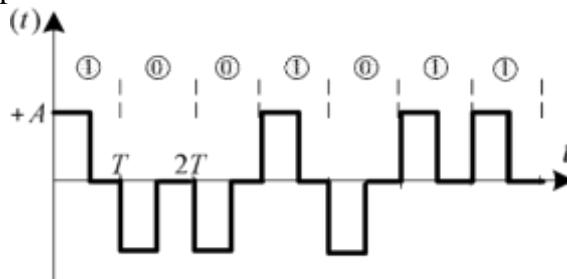


Figure 2.9- code RZ bipolaire

$$m_a = E[a_k] = \sum_M p_{a_k} a_k = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = E[(a_k - 0)^2] = E[a_k^2] = \sum_M p_{a_k} a_k^2 = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1$$

Par rapport au code RZ unipolaire, la moyenne de la séquence de symbole est nulle. En conséquence, la densité spectrale ne comporte plus de spectre de raies. On a $\sigma_a^2 = 1$.

$$S_{xx}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left| \frac{\sin\left(\pi f \frac{T_b}{2}\right)}{\pi f \frac{T_b}{2}} \right|^2 \quad (2.10)$$

La densité spectrale de puissance du code RZ bipolaire simple est présentée sur la figure 2.10

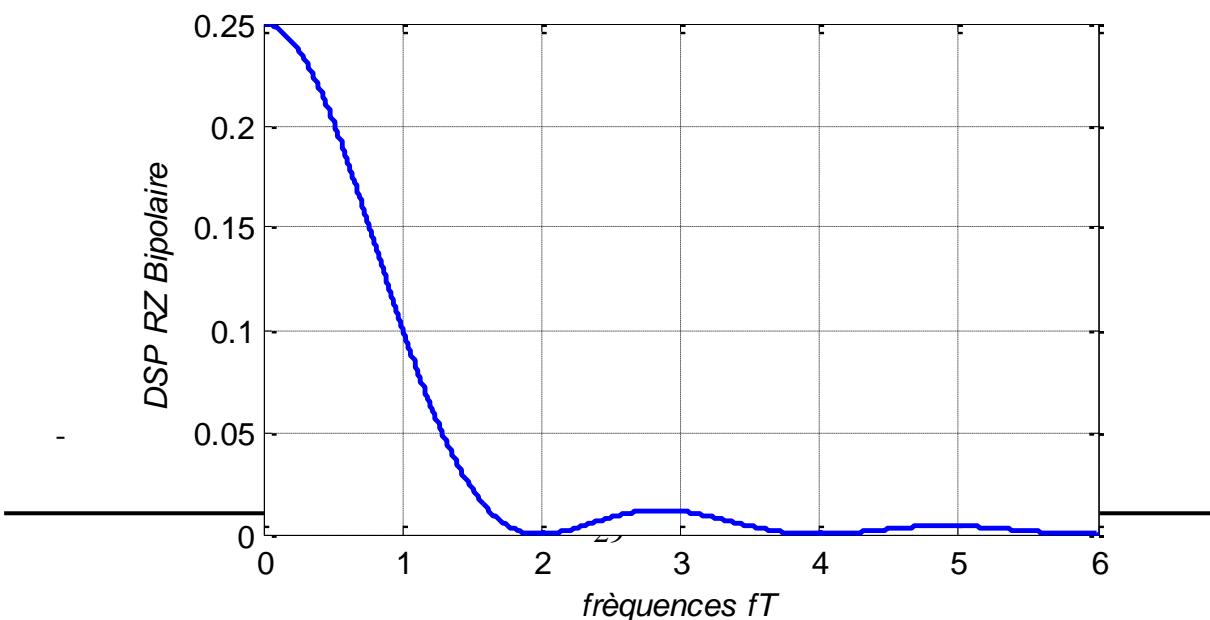
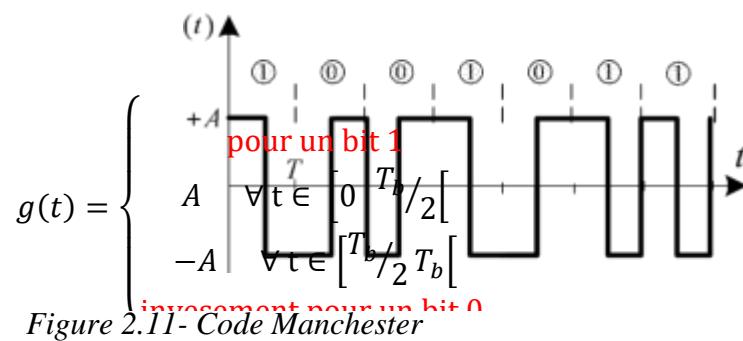
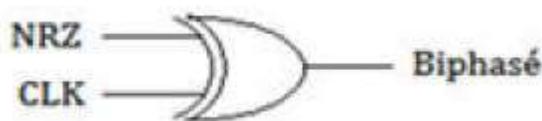


Figure 2.10- Code RZ bipolaire

2.4.3 Code biphasé ou Manchester

Ce code associe à chaque bit égal à "1" un niveau $+A$ pendant une durée $T/2$ puis un niveau $-A$ pendant $T/2$. A chaque bit égal à "0" on associe un niveau $-A$ pendant $T/2$ puis un niveau $+A$ pendant $T/2$.

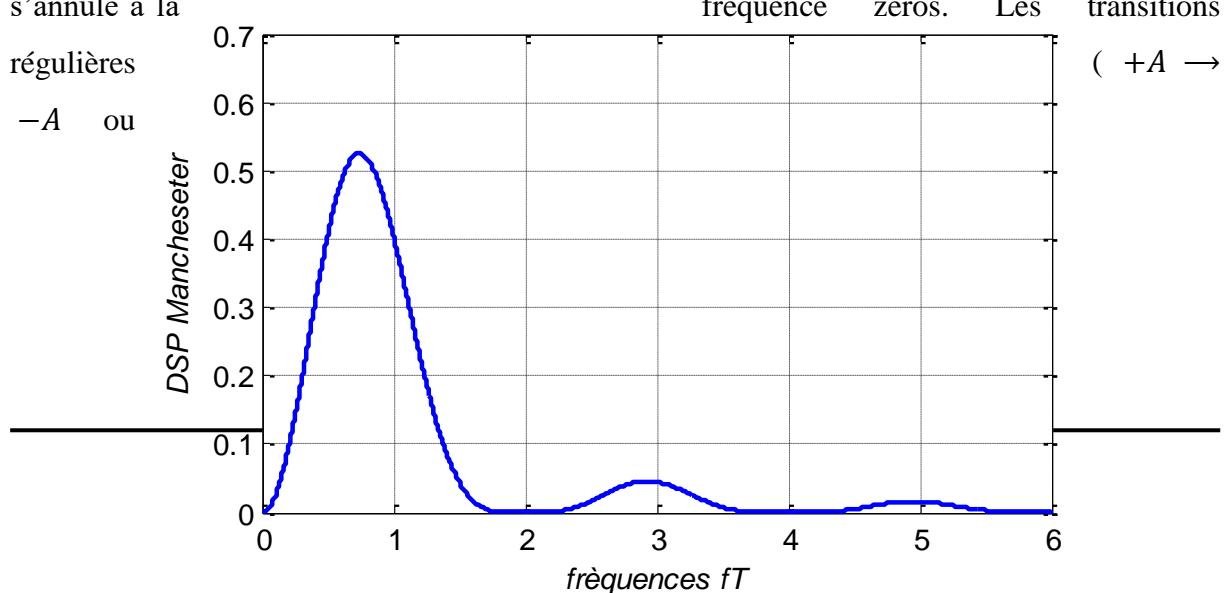


Les symboles a_k sont indépendants, de moyenne nulle et de variance unitaire, la densité spectrale de puissance de ce code est donnée par l'expression suivante :

$$S_{xx}(f) = S_{xx}(f) = A^2 T_b \sin^2 \left(\pi f \frac{T_b}{2} \right) \left(\frac{\sin \left(\pi f \frac{T_b}{2} \right)}{\pi f \frac{T_b}{2}} \right)^2 \quad (2.11)$$

La densité spectrale de puissance du code biphasé est présentée sur la figure 2.12. Elle s'annule à la fréquence zéros. Les transitions

régulières $+A \rightarrow -A$ ou $-A \rightarrow +A$ sont indiquées par des flèches.



inversement) permettent d'extraire simplement l'horloge de synchronisation. Cependant, l'occupation spectrale se trouve augmentée par rapport au code NRZ.

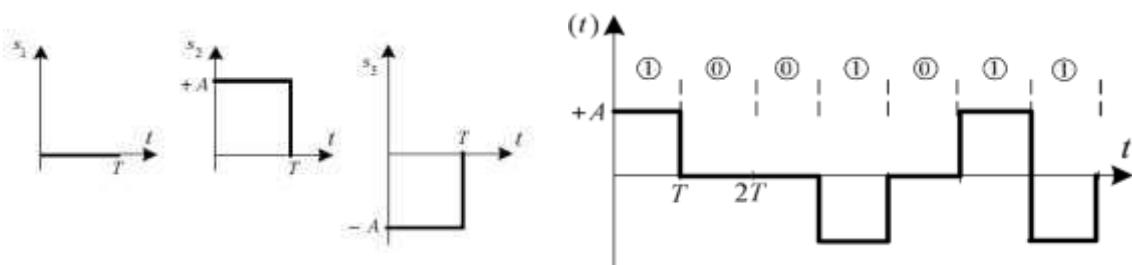
Figure 2.12- DSP du code Manchester (watt)

2.5 Les codes en lignes à symboles dépendants

Pour ces codes en lignes, les symboles a_k ne sont pas indépendants bien que la source de message soit toujours à éléments binaire i-i-d. Nous allons décrire un code célèbre appelé code bipolaire ou AMI (Alternante Marker Inversion)

2.5.1 Code bipolaire

Ce code associe à chaque bit égal à "1" successivement un niveau $+A$ (signal S_2) et un niveau $-A$ (signal S_3). A chaque bit égal à "0" est associé un niveau 0 (signal S_1).



La densité spectrale de puissance avec un codage bipolaire est donnée par l'expression suivante

Figure 2.14- Signal Bipolaire

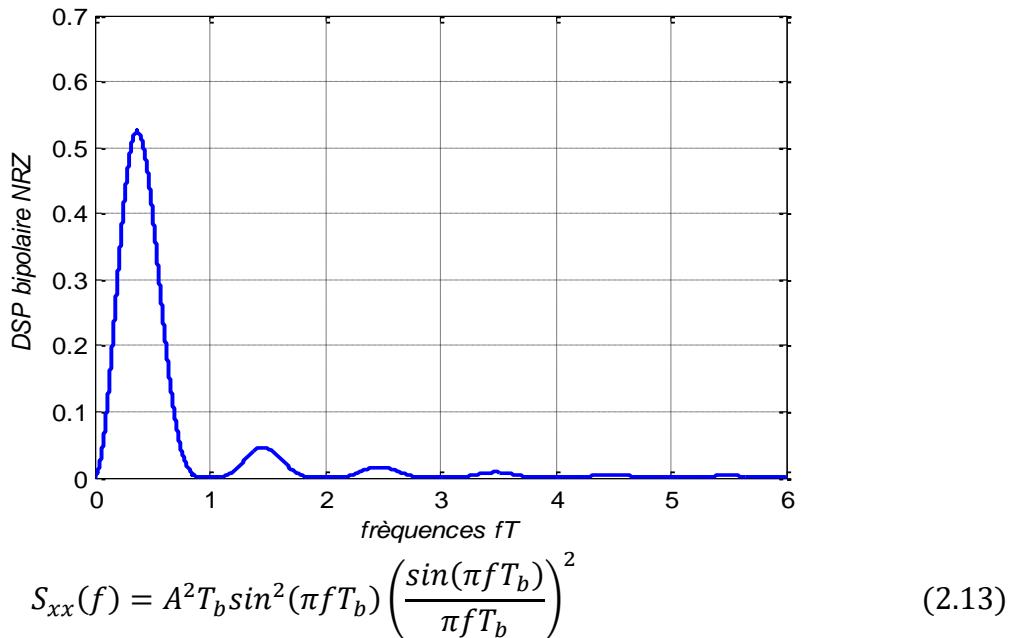


Figure 2.15- DSP Bipolaire (AMI)

Ce code peut être utilisé lorsque le canal de transmission ne laisse pas passer les basses fréquences.

2.5.2 Code HDB3 (Haute Densité Bipolaire d'ordre 3)

Quel que soit le code utilisé la restitution de l'horloge bit peut être difficile si lenombre de transitions est insuffisant. Pour remédier à ce problème on distingue le codeHDBn (Haute Densité Bipolaire d'ordre n).

2 Transmission en Bande de Base sur Canal Idéal

Ce code, très utilisé en télécommunication, est basé sur le code RZ bipolaire, il interdit la transmission d'une suite de plus de trois zéro successifs (pour éviter les pertes d'horloge).

S'il n'y a pas plus de trois 0 successifs, dans le message binaire, la règle du codage est celle du

$$\text{code AMI} \begin{cases} a_k = \pm 1, \alpha_k = 1 \\ a_k = 0, \alpha_k = 0 \end{cases}$$

Si la suite de bits du message binaire à émettre comporte au moins quatre zéros successives, la règle du codage consiste à remplacer la séquence « 0000 » par une des séquences possibles : « B00V » ou bien « 000V » de sorte que deux viols successifs soient de polarités différentes, et où B et V sont respectivement les symboles de bourrage et de viol.

La règle de codage dans ce cas est régie par l'algorithme suivant

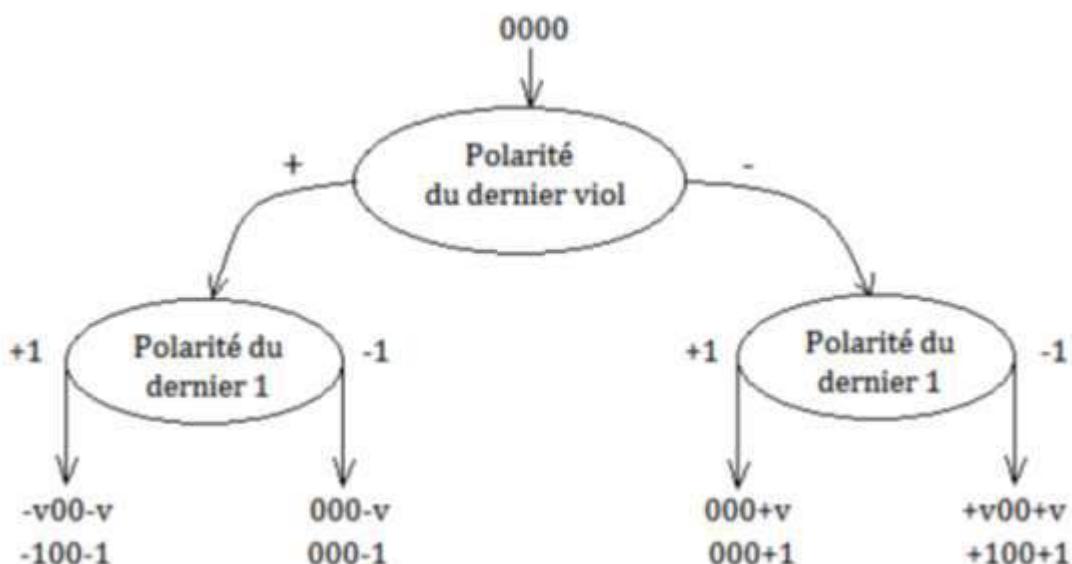


Figure 2.16- La règle de codage du HDB3

La figure ci-dessous représente un exemple de chronogramme du code HDB3 dont lequel on suppose que le dernier viol est de polarité positive.

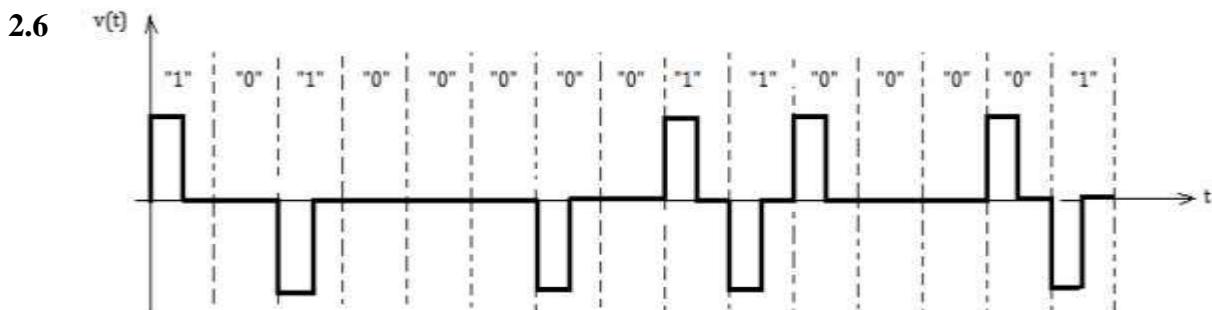


Figure 2.17- chronogramme du code HDB3

Code NRZ M-aire

Les codes que nous venons d'étudier sont tous des codes binaires. Les applications majeures des codes binaires en ligne restent les transmissions en bande de base sur paires torsadées, câbles coaxiaux et fibres optiques. Dans ces applications, l'encombrement spectrale n'est pas un paramètre trop important.

Nous allons maintenant étudier le code NRZ M-aire qui permet de transporter plusieurs bits par symbole et donc d'améliorer l'efficacité spectrale du code. Ce code est également à la base des modulations numériques en quadrature souvent utilisées pour les transmissions par ondes modulées.

Comme pour le code NRZ, l'impulsion élémentaire d'un code NRZ M-aireg(t) a une durée T_b et une amplitude $+A$. Pour un code NRZ M-aire où M est une puissance de 2, les bits sont groupés par paquet de $\log_2 M$ bits. Les symboles sont codés suivant $\{\pm 1, \pm 3, \pm (2p + 1), \dots, \pm (M - 1)\}$. Ainsi, les symboles peuvent prendre M valeurs différentes.

On a la relation suivante entre T_b la durée de transmission d'un bit et T_s la durée de transmission d'un symbole : $T_s = T_b \log_2 M$.

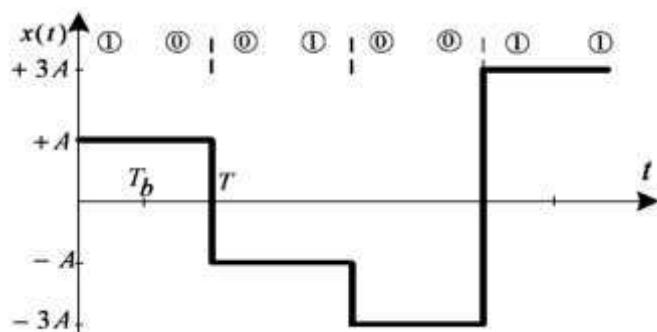


Figure 2.18- Signal correspondant au codage NRZ 4-aire, $T_s = 2Tb$

Si les bits sont indépendants et équiprobables, la moyenne et la variance de la séquence des symboles a_k se calculent comme suit :

$$m_a = E[a_k] = \frac{1}{M} \sum_{p=\frac{M}{2}-1}^{\frac{M}{2}-1} (2p+1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = E[(a_k - m_a)^2] = \frac{2}{M} \sum_{p=0}^{\frac{M}{2}-1} (2p+1)^2 = \frac{M^2 - 1}{3}$$

La densité spectrale de puissance du code NRZ M-aire est:

$$S_{xx}(f) = A^2 \frac{M^2 - 1}{3} T_s \left| \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} \right|^2 \quad (2.14)$$

La densité spectrale de puissance du code NRZ 4-aire pour est comparée à celle du code NRZ sur la figure 2.17.

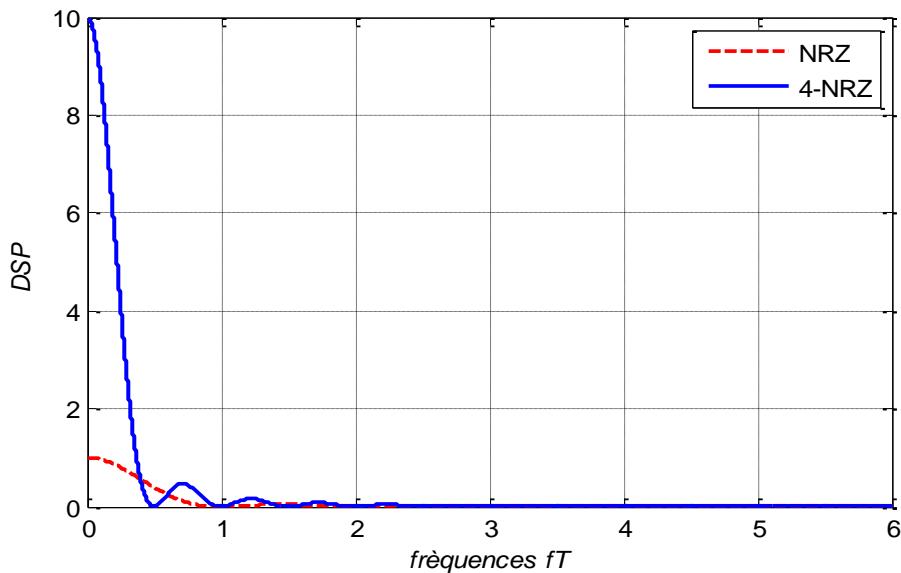


Figure 2.19- Densité spectrale des codes NRZ et NRZ-4 aire

2.7 Transmission et détection d'un message binaire en bande de base sur un canal idéal

Considérons la transmission d'un message constitué par une suite d'éléments binaires α_k émis aux instants kT_b indépendants et identiquement distribués (i-i-d) sur l'alphabet $\{0,1\}$, avec :

$$p_0 = \Pr\{\alpha_k = 0\} \text{ et } p_1 = \Pr\{\alpha_k = 1\} \forall k$$

Un système de transmission d'un message numérique en bande de base est représenté sur la figure 2.18.

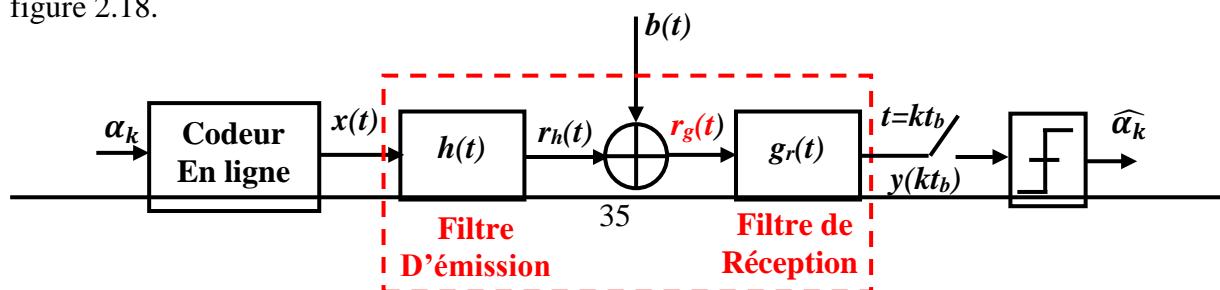


Figure 2.20- Système de transmission numérique en bande de base

Le signal $x(t)$ en sortie du codeur en ligne a pour expression :

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT_b)$$

Où a_k est un symbole binaire et $g(t)$ est une forme d'onde de durée T_b .

Nous ferons l'hypothèse que le canal de transmission est linéaire et invariant dans le temps (c'est un filtre linéaire) défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et procède une bandepassante infinie et un spectre unitaire de tel façons que les signaux émis ne subissent aucune déformation. La réponse impulsionnelle se simplifié donc à :

$$h(t) = \delta(t)$$

Ce modèle de canal à bande passante infinie, qualifie parfois canal idéal, n'a pas de réalité physique. Il constitue tout fois un bon modèle qui peut être utilisé à chaque fois que la bande passante su canal réel est assez large pour transmettre le code en ligne sans pratiquement modifier la forme d'onde $g(t)$.

Nous considérons la transmission d'un seul élément binaire unique α_o émis en raison de D éléments binaires par seconde. D'après la figure 2.18, le signal $r_g(t)$ à l'entrée du récepteur est égale à :

$$\begin{aligned} r_g(t) &= r_h(t) + b(t) \\ r_g(t) &= x(t) * h(t) + b(t) \\ r_g(t) &= a_o g(t) * h(t) + b(t) \\ r_g(t) &= a_o g(t) + b(t) \end{aligned}$$

Où $b(t)$ est un bruit blanc, gaussien, centré, stationnaire, de densité spectrale de puissance :

$$S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} \quad \forall f$$

Le codage en ligne choisie est de type NRZ bipolaire, les symboles a_k prends les valeurs :

$$\begin{cases} a_k = +1 & \text{si } a_k = 1 \\ a_k = -1 & \text{si } a_k = 0 \end{cases}$$

Pour décoder l'élément binaire α_o (ou le symbole a_o) à partir du signal $x(t)$, nous allons considérer un récepteur constitué d'un filtre de réponse impulsionnel $g_r(t)$,

appeléfiltre de réception – son rôle est de minimiser la puissance de bruit- suivi d'un échantillonneur et d'un comparateur à seuil.

L'échantillon $y(t_0)$, prélevé à l'instant kt_0 en sortie du filtre de réception, est comparé à un seuil (S). Une décision sur la valeur de l'élément binaire $\hat{\alpha}_0$ est prise selon la règle suivante :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 = 1 \text{ si } y(t_0) > S \\ \hat{\alpha}_0 = 0 \text{ si } y(t_0) \leq S \end{cases} \quad (2.15)$$

2.7.1 Calcule de la probabilité d'erreur

L'objective de ce paragraphe est de calculer la probabilité d'erreur P_e en fonction des paramètres de la chaine de transmission.

Le récepteur peut commettre deux types d'erreur : prendre la décision $\hat{\alpha}_0 = 1$ alors que $\alpha_0 = 0$, ou inversement, c-a-d $\hat{\alpha}_0 = 0$ alors que $\alpha_0 = 1$. Soient respectivement P_{e0} et P_{e1} les deux probabilités conditionnelles de décision erronée avec :

$$\begin{aligned} P_{e0} &= Pr\{\hat{\alpha}_0 = 1 / \alpha_0 = 0\} \\ P_{e1} &= Pr\{\hat{\alpha}_0 = 0 / \alpha_0 = 1\} \end{aligned}$$

Soit $\{p_0, p_1\}$ les probabilités d'apparitions des $\{0, 1\}$, la probabilité d'erreur P_e finale est égale :

$$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$$

$$P_e = P_0 Pr\{\hat{\alpha}_0 = 1 / \alpha_0 = 0\} + P_1 Pr\{\hat{\alpha}_0 = 0 / \alpha_0 = 1\} \quad (2.16)$$

L'échantillons $y(kT_b)$ à la sortie du filtre de réception est égale à :

$$\begin{aligned} y(t_0) &= r_g(t_0) * g_r(t_0) \\ &= (a_0 g(t_0) + b(t_0)) * g_r(t_0) \\ &= [a_k g(t_0) * g_r(t_0)] + [b(t_0) * g_r(t_0)] \end{aligned}$$

On pose $r(t) = g(t) * g_r(t)$ et $B(t) = b(t) * g_r(t)$

$$y(t_0) = a_k r(t_0) + B(t_0)$$

2 Transmission en Bande de Base sur Canal Idéal

$r(t)$ est la réponse du filtre de réception sur la forme d'onde du code en ligne $g(t)$, et $B(t)$ est le bruit filtré par le filtre de réception.

L'échantillon $y(t_0)$ noté Y est une variable aléatoire aussi gaussienne, de moyenne $a_0 r(t_0)$ et de variance σ_y^2 .

$$\sigma_y^2 = E[B(t_0)^2] = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g_r^2(t) dt \quad (2.17)$$

De la règle de décision 2.15, la probabilité d'erreur P_e s'écrit :

$$P_e = P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} P_{Y/\alpha_0=0}(y) dy + P_1 \int_{-\infty}^{\textcolor{red}{S}} P_{Y/\alpha_0=1}(y) dy \quad (2.18)$$

Où $P_{Y/\alpha_0=0}(y)$ et $P_{Y/\alpha_0=1}(y)$ représentent respectivement les densités de probabilité (ddp) conditionnelles de la variable aléatoire Y lorsque l'élément binaire α_k est égale à 0 ou 1 soit :

$$P_{Y/\alpha_0=0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp^{-\left(\frac{(y-(-r(t_0)))^2}{2\sigma_y^2}\right)}$$

$$P_{Y/\alpha_0=1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp^{-\left(\frac{(y-(+r(t_0)))^2}{2\sigma_y^2}\right)}$$

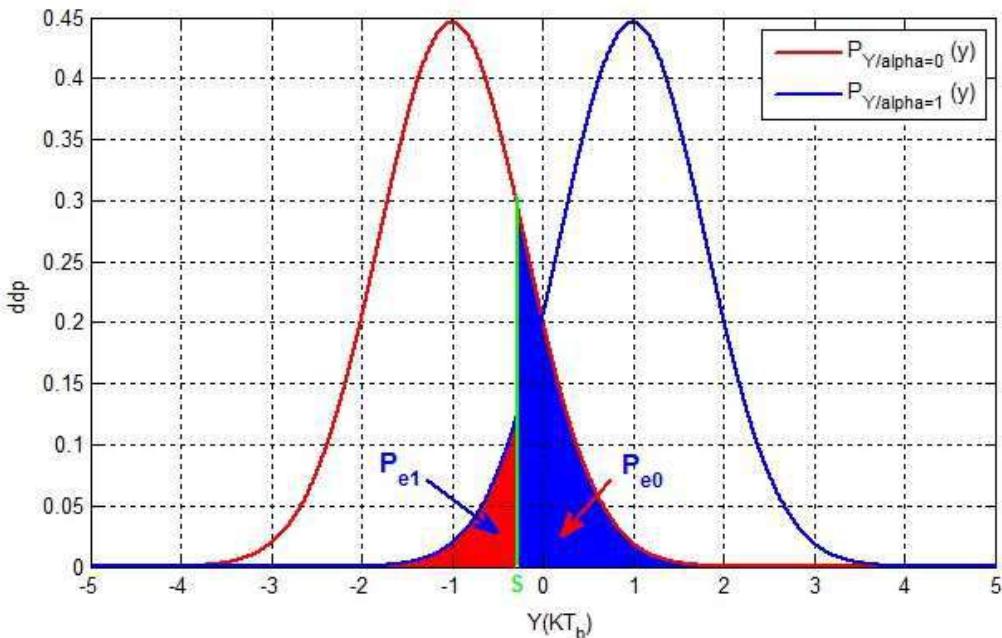


Figure 2.21- Représentation des densités de probabilité conditionnelles

2 Transmission en Bande de Base sur Canal Idéal

Comme illustré dans la figure 2.19, pour un seuil S quelconque, les deux probabilités conditionnelles de décision erronée $Pe0$ et $Pe1$ sont représentées respectivement par les surfaces délimitées par le seuil S .

Appliquons les deux densités de probabilité (ddp) conditionnelles dans l'équation (2.18). La probabilité d'erreur Pe est :

$$\begin{aligned}
 Pe &= P_0 \int_S^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp^{-\left(\frac{(y-(-r(t_0)))^2}{2\sigma_y^2}\right)} dy + P_1 \int_{-\infty}^S \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp^{-\left(\frac{(y-(+r(t_0)))^2}{2\sigma_y^2}\right)} dy \\
 &= P_0 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int_S^{+\infty} \exp^{-\left(\frac{(y+r(t_0))^2}{2\sigma_y^2}\right)} dy}_{\textcircled{1}} + P_1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int_{-\infty}^S \exp^{-\left(\frac{(y-r(t_0))^2}{2\sigma_y^2}\right)} dy}_{\textcircled{2}}
 \end{aligned}$$

Pour $\textcircled{1}$, On pose :

$$U = \frac{y + r(t_0)}{\sqrt{2\sigma_y^2}} \rightarrow \begin{cases} dU = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_y^2}} dy \\ y = S \rightarrow U = \frac{r(t_0) + S}{\sqrt{2\sigma_y^2}}, \lim_{y \rightarrow \infty} U = +\infty \end{cases}$$

$$\textcircled{1} = + \frac{\sqrt{2\sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int_{\frac{S+r(t_0)}{\sqrt{2\sigma_y^2}}}^{+\infty} \exp^{-(U)^2} dU = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{S+r(t_0)}{\sqrt{2\sigma_y^2}}}^{+\infty} \exp^{-(U)^2} dU$$

Pour $\textcircled{2}$, On pose :

$$-U = \frac{y - r(t_0)}{\sqrt{2\sigma_y^2}} \rightarrow \begin{cases} dU = -\frac{1}{\sqrt{2\sigma_y^2}} dy \\ y = S \rightarrow U = \frac{r(t_0) - S}{\sqrt{2\sigma_y^2}}, \lim_{y \rightarrow -\infty} U = +\infty \end{cases}$$

$$\textcircled{2} = - \frac{\sqrt{2\sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int_{+\infty}^{\frac{r(t_0)-S}{\sqrt{2\sigma_y^2}}} \exp^{-(U)^2} dU = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{r(t_0)-S}{\sqrt{2\sigma_y^2}}}^{+\infty} \exp^{-(U)^2} dU$$

La probabilité d'erreur P_e de la transmission d'un code NRZ binaire a finalement pour expression :

$$P_e = P_0 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{S + r(t_0)}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) + P_1 \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{r(t_0) - S}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \quad (2.19)$$

On note que la fonction d'erreur complémentaire $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp^{-(U)^2} dU$.

2.7.2 Seuil optimale

Le seuil optimal qui minimise la probabilité d'erreur est obtenu en cherchant la valeur de S qui annule la drivée de la probabilité d'erreur (2.19) :

$$\begin{aligned} \frac{dP_e}{dS} &= \frac{d}{dS} \left(P_0 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{S + r(t_0)}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) + P_1 \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{r(t_0) - S}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right) = 0 \\ \frac{dP_e}{dS} &= \left(P_1 \exp^{-\left(\frac{(r(t_0)-S)^2}{2\sigma_y^2}\right)} - P_0 \cdot \exp^{-\left(\frac{(S+r(t_0))^2}{2\sigma_y^2}\right)} \right) = 0 \rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \exp^{\left(\frac{2Sr(t_0)}{\sigma_y^2}\right)} \end{aligned}$$

Le seuil optimal noté S_{op} , est alors égale :

$$S_{op} = \frac{\sigma_y^2}{2r(t_0)} \ln \left(\frac{P_0}{P_1} \right) \quad (2.19)$$

Le seuil optimal dépend de la probabilité $\{p_0, p_1\}$, c'est-à-dire des statistiques du message si, par exemple, $P_1 > P_0$, le seuil se déplace vers les valeurs négative, de manière à favoriser le décision $\hat{\alpha}_k = 1$

Lorsque $P_1 = P_0 = \frac{1}{2}$, le seuil optimal est égal à zéro, le circuit de décision vient donc tester le signe de l'échantillon $y(t_0)$ pour décoder l'élément binaire α_0 . La probabilité d'erreur devient :

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{r(t_0)}{\sqrt{2}\sigma_y} \right)$$

3. Transmission en Bande de Base sur Canal à Bande Limitée

3.1 Introduction

Le modèle du canal idéal qu'on a étudié où la bande passante est infinie est physiquement irréalisable. Les canaux physiques utilisés sont toujours des canaux à bande limitée. Il se pose alors le problème de transmettre le débit le plus grand possible dans une bande de fréquence donnée et sans perdre en performances par rapport à la transmission sur une bande illimitée.

3.2 Canal à bande limitée – Problème de l'IES

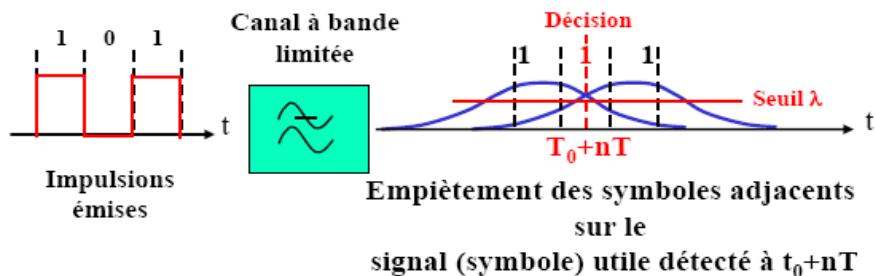


Figure 3.1- Perturbations liées à la limitation en bande passante du canal

Considérons la transmission d'une suite de symboles M -aires sur un canal à bande limitée. Nous supposerons que la limitation de la bande est due à la présence d'un filtre d'émission de réponse impulsionnelle $h(t)$ figure (3.2)

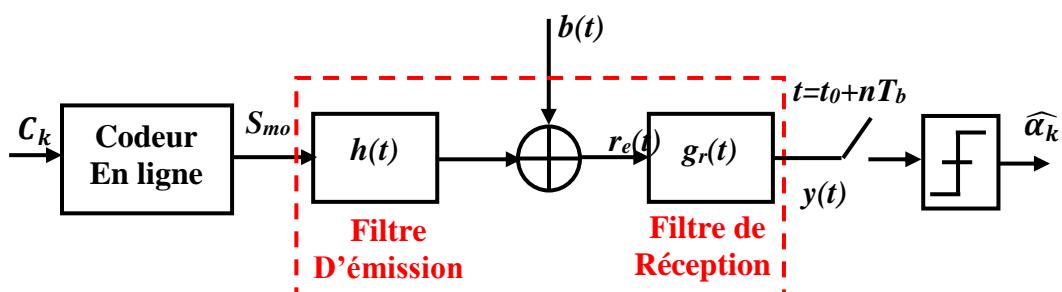


Figure 3.2- Canal à bande limitée

Le signal du code en expression :

ligne $x(t)$ à pour

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$$

Le signale $r_e(t)$ reçu par la réception est égale à :

$$r_e(t) = \sum_k a_k r_h(t - kT_s) + b(t)$$

Où $r_h(t)$ est le résulte du filtrage de l'onde de mise en forme $g(t)$ par le filtre d'émission $h(t)$.En considérons toujours un récepteur linéaire constitué d'un filtre de réponse $g_r(t)$, d'un échantillonneur et d'un comparateur à seuils, la sortie $y(t_0 + nT_s)$, du filtre de réception à l'instant $t_0 + nT_s$ pour expression:

$$y(t_0 + nT_s) = \sum_k a_k r(t_0 + nT_s - kT_s) + B(t_0 + nT_s)$$

où $r(t)$ et $B(t)$ résultent respectivement du filtrage du signale $r_h(t)$ et du bruit $b(t)$ par le filtre de réception de réponse impulsionale $g_r(t)$:

$$r(t) = r_h(t) * g_r(t)$$

$$B(t) = b(t) * g_r(t)$$

Dans un canal à bande limitée, le signal $r(t)$ n'est plus de durée T_s . L'échantillony($t_0 + nT_s$)peut désormais dépendre du symbole a_n , mais aussi des symboles antérieurs, et même postérieurs, au symbole a_n si l'instant initial de décision t_0 est supérieure à T_s . Cette situation est illustrée sur la figure (3.3).

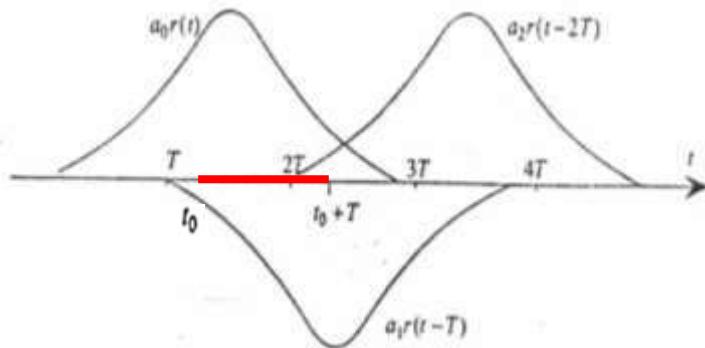


Figure 3.3- Illustration de l'interférence entre symboles : à l'instant $t_0 + T_s$ le signal échantillonné dépend du symbole a_1 mais aussi des symboles a_0 et a_2

$$y(t_0 + nT_s) = \sum_k a_k r(t_0 + nT_b - kT_s) + B(t_0 + nT_s)$$

$$y(t_0 + nT_s) = \sum_k a_k r(t_0 + (n - k)T_s) + B(t_0 + nT_s)$$

On pose $n - k = m$

$$y(t_0 + nT_s) = a_n r(t_0) + \underbrace{\sum_m a_{n-m} r(t_0 + mT_s)}_{\text{Interférence entre symboles IES}} + B(t_0 + nT_s)$$

(3.1)

Le 1er terme de l'équation (3.1) $a_n r(t_0)$, représente le nième bit désiré. Le deuxième terme qui dépend des symboles a_{n-k} ($n \neq k$) est appelé Interférence Entre Symboles (IES) et le troisième représente le bruit.

3.3 Condition temporelle d'absence D'ISI

On veut qu'à (t_0) il n'y ait pas d'IES, Mathématiquement cela revient à annuler les termes d'IES

$$r(t_0 + mT_s) = 0, \forall m = n - k \neq 0$$

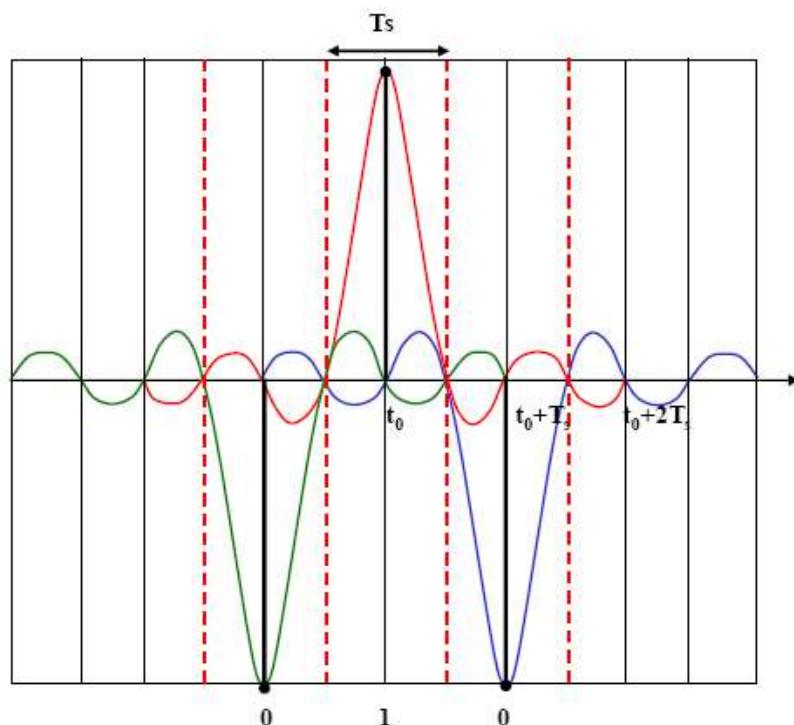


Figure 3.4- Aux instants de décision pas d'IES $r(t_0 + mT_s) = 0, \forall m \neq 0$

3.4 Condition spectrale d'absence D'ISI

Quelle condition doit vérifier le spectre des impulsions pour qu'il n'y ait pas d'IES aux instants de décision ?

Faisons abstraction du bruit et considérons une impulsion reçue $r(t)$. L'impulsion reçue $r_e(t)$ échantillonner à l'instant $t_0 + nT_s$ est :

$$\begin{aligned}
 r_e(t) &= r(t) \sum_n \delta(t - (t_0 + nT_s)) \\
 r_e(t) &= r(t) \left(\sum_n \delta(t - nT_s) \right) \delta(t - t_0) \\
 R_e(f) &= R(f) \left(\frac{1}{T_s} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right) e^{-j2\pi f t_0} \\
 R_e(f) &= \left(\frac{1}{T_s} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \right) e^{-j2\pi \frac{n}{T_s} t_0}
 \end{aligned}
 \boxed{(3.2)}$$

Or par ailleurs

$$\begin{aligned}
 r_e(t) &= r(t) \sum_n \delta(t - (t_0 + nT_s)) \\
 r_e(t) &= \sum_n r(t_0 + nT_s) \delta(t - (t_0 + nT_s)) \\
 R_e(f) &= \int \left(\sum_n \underbrace{r(t_0 + nT_s)}_{\text{indépendant de } t} \delta(t - (t_0 + nT_s)) \right) e^{-j2\pi f t} dt \\
 R_e(f) &= \sum_n r(t_0 + nT_s) e^{-j2\pi f (t_0 + nT_s)}
 \end{aligned}
 \boxed{(3.3)}$$

Les équations (3.2) et (3.3) sont égaux donc :

$$\frac{1}{T_s} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T_s}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{T_s} t_0} = \sum_n r(t_0 + nT_s) e^{-j2\pi f(t_0 + nT_s)}$$

Or, rappelons la condition de Nyquist : $r(t_0 + mT_s) = 0, \forall m \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_s} \sum_n R\left(f - \frac{n}{T_s}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{T_s} t_0} &= r(t_0) e^{-j2\pi f t_0} \\ \sum_n R\left(f - \frac{n}{T_s}\right) e^{j2\pi \left(f - \frac{n}{T_s}\right) t_0} &= T_s r(t_0) \\ \sum_n \frac{R\left(f - \frac{n}{T_s}\right) e^{j2\pi \left(f - \frac{n}{T_s}\right) t_0}}{r(t_0)} &= T_s \end{aligned}$$

On pose $R^{(t_0)}(f) = \frac{R(f)}{r(t_0)} e^{j2\pi f t_0}$

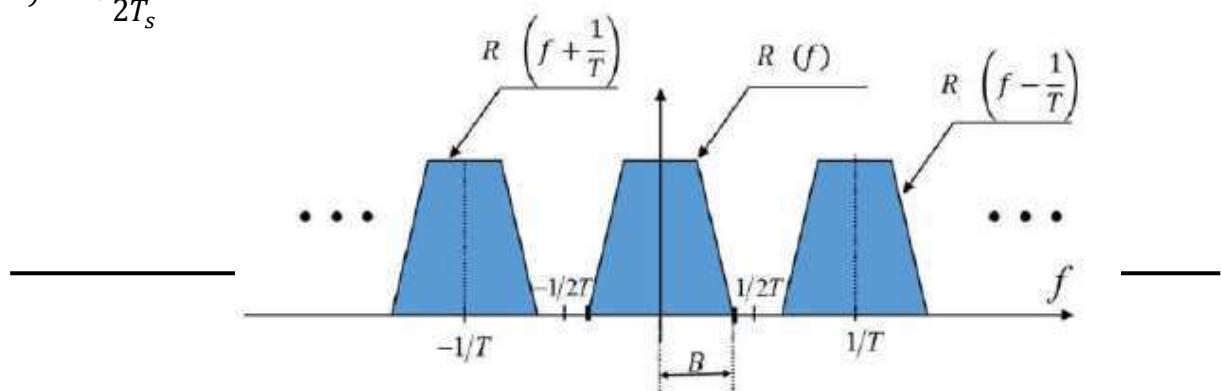
La fonction $R^{(t_0)}(f)$ est la transformée de Fourier de signal $r^{(t_0)}(t)$, la version normalisée du signal $r(t)$ et avancé du t_0 .

La condition d'absence d'IES peut s'exprimer plus simplement à partir de la fonction $R^{(t_0)}(f)$:

$$\sum_n R^{(t_0)}\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = T_s$$

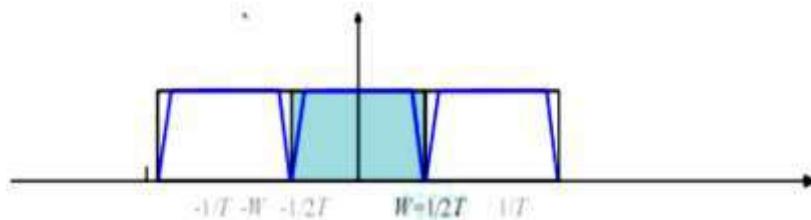
C'est l'addition de $R^{(t_0)}(f)$ et ses copies à tous les $\frac{n}{T_s}$. Elle doit donner un résultat constant T_s pour toutes f . Si $R^{(t_0)}(f)$ à une largeur de bande limité à $[-B, B]$, On a deux cas à considérer :

1) $B < \frac{1}{2T_s}$

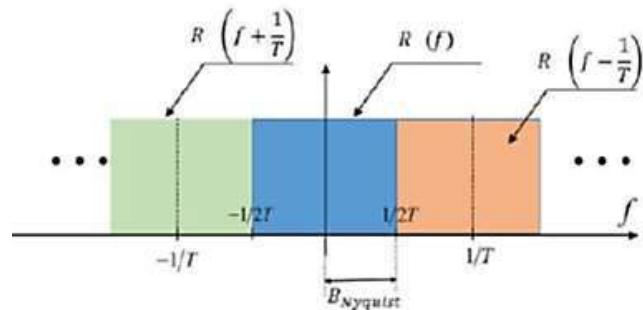


On remarque des écarts entre copies, donc il est impossible d'avoir une somme constante à toutes les fréquences $f \rightarrow$ impossible d'éviter ISI.

2) $B \geq \frac{1}{2T_s}$



Dans ce cas la condition de Nyquist est satisfaite seulement si $R(f)$ est carré :



Donc le filtre qui assure l'absence des ISI est :

$$R^{(t_0)}(f) = \begin{cases} T_s |f| > B \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ce filtre n'est pas physiquement réalisable. (Aucune fonction de transfert assure la continuité aux fréquences $\pm \frac{1}{2T_s}$).

3.5 Filtre en cosinus surélevé

Pour éviter le problème de la non-réalisation de la fenêtre porte on utilise le filtre en cosinus surélevé (raisedcosine où roll off Nyquist filter) qui vérifie la condition de Nyquist.

La fonction de transfert de ce filtre est donnée par :

$$CS_\alpha(f) = \begin{cases} T_s & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[1 + \sin \frac{\pi T_s}{\alpha} \left(\frac{1}{2T_s} - |f| \right) \right] & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Où α est le coefficient de retombée (roll-off) $0 \leq \alpha \leq 1$.

Le filtre en cosinus surélève occupe la bande de fréquence :

$$B = \frac{1+\alpha}{2T_s} = \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{D_b}{\log_2 M} \right)$$

Sa réponse impulsionnelle est la suivante :

$$cs_\alpha(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \frac{\cos\left(\frac{\pi \alpha t}{T_s}\right)}{1 - 4\alpha^2 \frac{t^2}{T_s^2}}$$

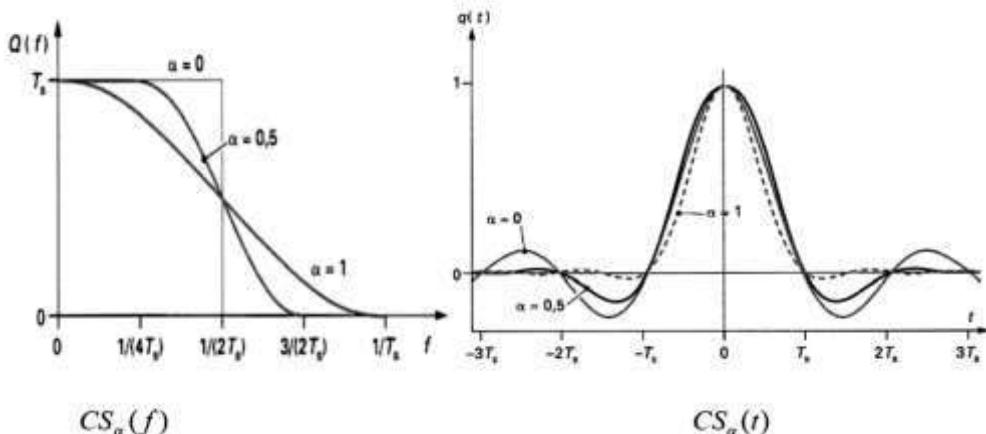


Figure 3.5- Réponse impulsionnelle et réponse en fréquentielle d'un filtre en cosinus surélevé

Conclusion

En l'absence d'ISI, c.-à-d. lorsque les conditions de Nyquist sont satisfaites, la sortie du filtre de réception $y(t_0 + nT_s)$ à l'instant $t_0 + nT_s$ dépend du seul symbole a_n et du bruit :

$$y(t_0 + nT_s) = a_n r(t_0) + B(t_0 + nT_s)$$

$$\sum_m \underbrace{a_{n-m} r(t_0 + mT_s)}_{\text{Interférence entre symboles IES}} = 0, \text{ à condition} \left\{ \begin{array}{l} r(t_0 + mT_s) = 0, \forall m = n - k \neq 0 \\ \text{ou} \\ B \geq \frac{1}{2T_s} \end{array} \right.$$

3.6 Diagramme de l'œil

Le diagramme de l'œil permet d'observer le niveau de l'IES. Il représente les différentes traces d'un signal de communication sur une durée égale à la durée d'un symbole. Il permet d'analyser les effets du canal de transmission sur des caractéristiques comme la précision de l'instant d'échantillonnage, la quantité de bruit, etc.

La figure 3.6 montre toute une série de paramètres observables. Le principe général est que plus l'aire centrale est grande, plus la qualité du signal reçu est bonne. La largeur est liée à la facilité à synchroniser et différencier les échantillons successifs alors que la hauteur du lobe central traduit le rapport d'énergie entre le signal original et le bruit de canal.

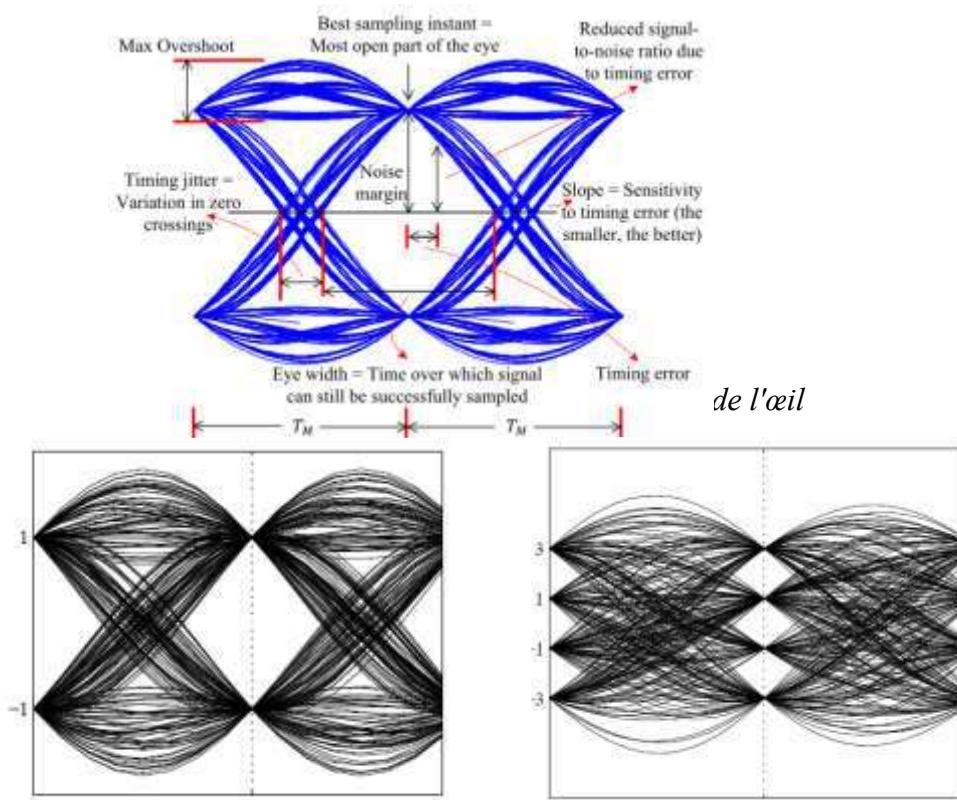


Figure 3.7- Diagramme de l'œil pour canal de Nyquist pour $M = 2$ et 4 sans bruit

L'ouverture verticale : mesure les performances contre le bruit. Plus il est ouvert en hauteur, plus il est facile de discriminer les deux symboles en présence de bruit et donc, plus la probabilité d'erreure est faible. Si le diagramme manifeste la présence d'une IES (faible), et

que l'on souhaite continuer à utiliser une détection par seuils (solution sous optimale), il faudra venir échantillonner le signal $r(t)$ aux instants où l'outil a une ouverture maximum.

-L'ouverture horizontale indique une résistance à un décalage des instants d'échantillonnage. Ainsi plus il est ouvert en largeur, plus les lobes secondaires de la réponse en temps seront faibles et plus l'accumulation des interférences dues au décalage des instants d'échantillonnage auront une influence cependant en termes de probabilité d'erreur. C'est le cas pour les fonctions en cosinus surélevé lorsque α augmente.

4. Détection Optimale

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la performance des systèmes de communications numériques en présence de bruit en mesurant par la probabilité d'erreur et nous introduisons le concept de détection optimale d'un signal. Dans tout le chapitre, nous supposons le canal de transmission sans distorsion, de telle façon que le signal reçu est considéré sans interférence entre ses symboles. Nous supposons de plus que le bruit, qui se superpose au signal, est un bruit blanc gaussien à valeur moyenne nulle et qu'il est indépendant du signal.

4.2 Détection d'un signal binaire et test des hypothèses

La figure 4.1 décrit les différentes opérations réalisées par un récepteur binaire. Le signal transmis pendant l'intervalle d'un symbole $(0, T)$ est représenté par :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T \text{ pour } 1 \\ s_2(t) & 0 \leq t \leq T \text{ pour } 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Le signal reçu $r(t)$ par le récepteur est de la forme :

$$r(t) = s_i(t) + b(t) \quad i = 1,2 \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.2)$$

où $b(t)$ est un bruit blanc gaussien à valeur moyenne nulle.

Nous trouvons deux étapes séparées au niveau de la détection du signal. La première étape consiste à réduire le signal reçu $r(t)$ en un simple nombre $z(T)$. Cette opération peut être réalisée par un filtre linéaire suivi d'un échantillonneur, comme le montre le block 1 de la figure 4-1. La sortie du block 1 du récepteur, échantillonnée au temps $t = T$, conduit à :

$$z(T) = a_i(T) + b_0(T) \quad i = 1,2 \quad (4.3a)$$

où $a_i(T)$ est la composante signal de $z(T)$ et $b_0(T)$ est la composante bruit. Nous pouvons écrire précédente sous la forme plus concise suivante :

$$z = a_i + b_0 \quad i = 1,2 \quad (4.3b)$$

4. Détection Optimale

Nous pouvons remarquer que b_0 est une variable aléatoire gaussienne à valeur moyenne nulle et donc que z est aussi une variable aléatoire gaussienne à valeur moyenne a_1 ou a_2 selon que $s_1(t)$ ou $s_2(t)$ a été transmis. L'échantillon z est souvent appelé le **test statistique**.

La seconde étape du processus de détection du signal consiste à comparer z avec un seuil λ au niveau du block 2 de la figure 9.1. La dernière étape est la prise de décision sur le résultat que nous écrivons sous la forme suivante :

$$z \begin{cases} > \lambda & H_1 \\ < \lambda & H_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

où H_1 et H_2 sont les deux hypothèses possibles. Choisir H_1 est équivalent à décider que le signal $s_1(t)$ a été envoyé, et choisir H_2 est équivalent à décider que le signal $s_2(t)$ a été envoyé. L'équation (4.4) indique que les hypothèses H_1 est choisie si $z > \lambda$, est l'hypothèse H_2 est choisie si $z < \lambda$. Si $z = \lambda$, la décision est arbitraire.

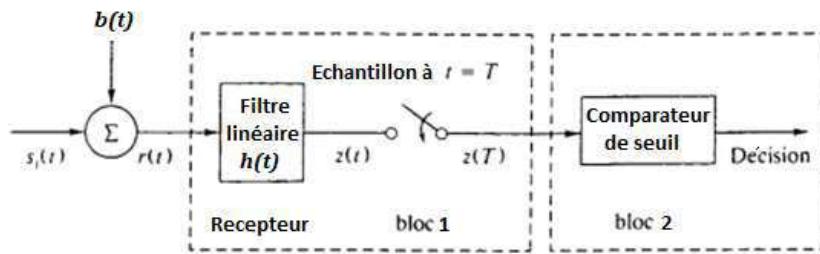


Fig4.1 Détection d'un signal binaire.

4.3 Probabilité d'erreur et détecteur de maximum de vraisemblance

4.3.1 Probabilité d'erreur

Pour un système de détection d'un signal binaire, il y a deux possibilités pour lesquelles peuvent se produire des erreurs. Quand un signal $s_1(t)$ a été transmis, une erreur se produisent si H_2 est choisie; ou quand un signal $s_2(t)$ a été transmis, une erreur se produisent si H_1 est choisie. Ainsi, la probabilité d'erreur P_e est exprimée par :

$$P_e = P(H_2|s_1) P(s_1) + P(H_1|s_2) P(s_2) \quad (4.5)$$

où $P(s_1)$ et $P(s_2)$ sont les probabilités a priori que $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont respectivement transmis.

Quand les symboles 1 and 0 se produisent avec probabilité identique, alors $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$ et nous avons :

$$P_e = \frac{1}{2} [P(H_2|s_1) + P(H_1|s_2)] \quad (4.6)$$

4.3.2 Détecteur au maximum de vraisemblance

Un critère courant pour choisir le seuil λ de l'équation (4.4) est basée sur la minimisation de la probabilité d'erreur de l'équation (4.5). Le calcul de la valeur de l'erreur minimum de $\lambda = \lambda_0$ commence en établissant le test du rapport de vraisemblance :

$$\Lambda(z) = \frac{\begin{matrix} H_1 \\ f(z|s_1) > P(s_1) \\ f(z|s_2) < P(s_2) \end{matrix}}{\begin{matrix} H_2 \end{matrix}} \quad (4.7)$$

où $f(z|s_i)$ est la densité de probabilité conditionnelle connue comme la vraisemblance de s_i . Le rapport $\Lambda(z)$ est connu comme le rapport de vraisemblance. L'équation (4.7) indique que nous choisirons l'hypothèse H_1 si le rapport de vraisemblance $\Lambda(z)$ est plus grand que le rapport des probabilités *a priori*. Si $P(s_1) = P(s_2)$, L'équation (4.7) se réduit à :

$$\Lambda(z) = \frac{\begin{matrix} H_1 \\ f(z|s_1) > \\ f(z|s_2) < \end{matrix} 1}{\begin{matrix} H_2 \end{matrix}} \quad (4.8a)$$

ou

$$\frac{\begin{matrix} H_1 \\ f(z|s_1) > \\ f(z|s_2) < \end{matrix}}{\begin{matrix} H_2 \end{matrix}} \quad (4.8b)$$

Si $P(s_1) = P(s_2)$ et les vraisemblances $f(z|s_i)$ ($i = 1, 2$) sont symétriques, Alors l'équation (4.7) conduit au critère suivant :

$$z \underset{\begin{matrix} H_2 \end{matrix}}{\underset{<}{\overset{>}{\lambda_0}}} \quad (4.9)$$

où

$$\lambda_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (4.10)$$

Il est possible de démontrer que le seuil λ_0 , représenté par l'équation (4.10), est le seuil optimum pour la minimisation de l'erreur de la probabilité. Le critère de l'équation (4.9) est connu comme le critère de l'erreur minimale. Un détecteur, qui minimise la probabilité de l'erreur pour une classe de signaux qui sont équiprobables, est aussi connu comme le détecteur de vraisemblance maximum.

4.3.3 Probabilité d'erreur en présence d'un bruit gaussien

4. Détection Optimale

La densité de probabilité du bruit aléatoire gaussien b_0 dans l'équation (4.3b) est :

$$f_{b_0}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{b_0}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_{b_0}^2}} \quad (4.11)$$

où $\sigma_{b_0}^2$ est la variance du bruit. A partir des équations (4.3b) and (4.11), il vient :

$$f(z|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{b_0}} e^{-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_{b_0}^2}} \quad (4.12a)$$

$$f(z|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{b_0}} e^{-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_{b_0}^2}} \quad (4.12b)$$

Ce résultat est illustré sue la figure 4.2.

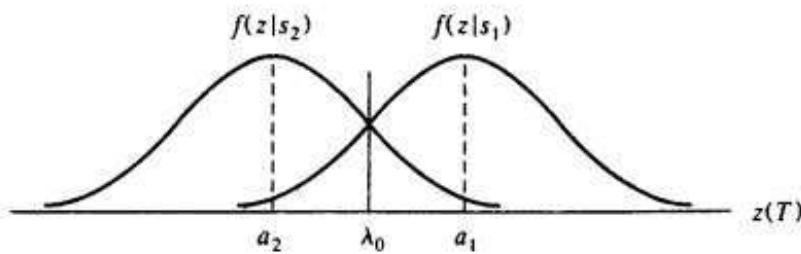


Fig 4.2 Densité de probabilité conditionnelle.

Maintenant, i

$$P(H_2|s_1) = \int_{-\infty}^{\lambda_0} f(z|s_1) dz \quad (4.13a)$$

$$P(H_1|s_2) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(z|s_2) dz \quad (4.13b)$$

A cause de la symétrie de $f(z|s_i)$, l'équation (4.6) se réduit à :

$$P_e = P(H_2|s_1) = P(H_1|s_2) \quad (4.14)$$

Ainsi, la probabilité d'erreur P_e est égale à l'aire comprise dans la queue de la courbe des fonctions de vraisemblance $f(z|s_1)$ ou $f(z|s_2)$ du côté le seuil n'est pas respecté :

$$P_e = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(z|s_2) dz \quad (4.15)$$

où $\lambda_0 = (a_1 + a_2)/2$ est le seuil optimum [Eq. (4.10)]. En utilisant l'équation (4.12b), nous avons :

$$P_e = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{b_0}} e^{-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_{b_0}^2}} dz$$

Posons $y = \frac{(z-a_2)}{\sigma_{b_0}}$. Alors $\sigma_{b_0} dy = dz$ et :

$$P_e = \int_{\frac{(a_1-a_2)}{2\sigma_{b_0}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{b_0}}\right) \quad (4.16)$$

où $Q(*)$ est le complémentaire de la fonction erreur donnée dans l'annexe C.

4.4 Détection optimale

Dans cette section, nous procéderons à l'optimisation du filtre linéaire, situé dans le bloc 1 de la figure 4.1 par minimisation de la probabilité d'erreur P_e .

4.4.1 Filtre adapté

Un filtre adapté est un filtre linéaire conçu pour fournir un rapport signal sur bruit pour un signal transmis donné. Considérons qu'un signal $s(t)$ connu et un bruit gaussien $b(t)$ se trouvent en entrée d'un filtre LTI suivi d'un échantillonneur comme le montre la figure 4.1. Soit $a(t)$ la sortie du filtre. Alors, à partir de l'équation (4.3a), à $t = T$, nous avons :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_0 = \frac{a^2(T)}{E[b_0^2(t)]} = \frac{a^2(T)}{\sigma_{b_0}^2} \quad (4.17)$$

Nous souhaitons trouver la fonction de transfert d'un filtre $H_0(\omega)$ qui maximise l'équation (4.17). Il est possible de montrer que :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_0 \leq \frac{2}{\eta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{2E}{\eta} \quad (4.18)$$

où $S(\omega) = \mathcal{F}[s(t)]$, $\eta/2$ est la densité spectrale du bruit, et E est l'énergie du signal d'entrée $s(t)$. Nous pouvons remarquer que le terme de droite de cette inégalité ne dépend pas de $H(\omega)$, mais seulement de l'énergie du signal et de la densité spectrale de puissance du bruit. Donc, nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{0_{max}} = \frac{2E}{\eta} \quad (4.19)$$

L'inégalité de l'équation (4.18) est vraie uniquement si la fonction de transfert du filtre $H_0(\omega)$ a la forme suivante :

$$H(\omega) = H_0(\omega) = S^*(\omega)e^{-j\omega T} \quad (4.20)$$

où * correspond au complexe conjugué.

La réponse impulsionnelle $h(t)$ de filtre optimale est :

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \begin{cases} s(T-t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.21)$$

L'équation (4.21) et la figure 4.3 illustrent les propriétés de base de ce filtre optimale. La réponse impulsionnelle d'un filtre adapté correspond à la forme retardée temporellement du symétrique du signal.

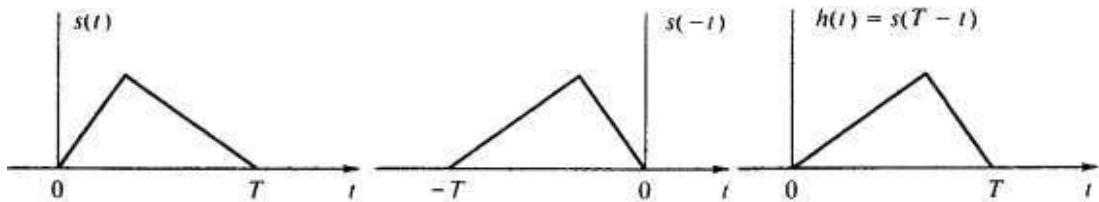


Fig4.3 Caractéristique d'un filtre adapté.

4.4.2 Corrélateur

La sortie $z(t)$ d'un filtre causal peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.22)$$

En Substituant $h(t)$ de l'équation (4.21) dans l'équation (4.22), nous obtenons :

$$z(t) = \int_0^t r(\tau)s[T-(t-\tau)]d\tau \quad (4.23)$$

Quand $t = \tau$, nous avons :

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau) d\tau \quad (4.24)$$

L'opération de l'équation (4.24) est connue comme l'opération de corrélation de $r(t)$ et $s(t)$.

Puisque la sortie du filtre adapté et la sortie du corrélateur sont identique à l'instant d'échantillonnage $t = T$, le filtre adapté et le corrélateur, décrits sur la figure 4.4, peuvent être utilisés de façon interchangeable.

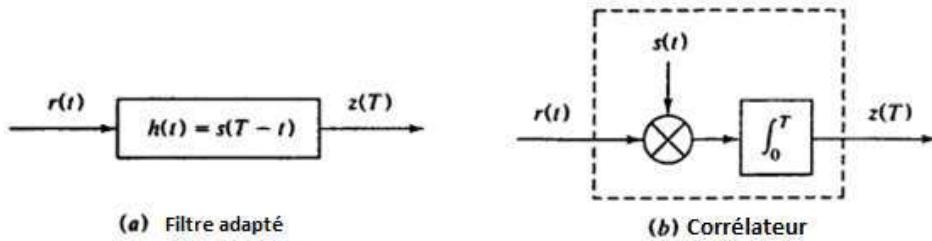


Fig4.4 Représentations schématiques d'un filtre adapté et d'un corrélateur.

4.4.3 Détection optimale

Pour minimiser P_e de l'équation (4.16), nous avons besoin de déterminer le filtre linéaire qui maximise $(a_1 - a_2)/(2\sigma_{b_0})$, ou de façon équivalente, qui maximise l'expression suivante :

$$\frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_{b_0}^2} \quad (4.25)$$

où $a_1 - a_2$ est la différence des composantes du signal à la sortie du filtre au temps $t = T$; par conséquent, $(a_1 - a_2)^2$ est la puissance instantanée de la différence des signaux et $\sigma_{b_0}^2$ est la puissance moyenne du bruit en sortie.

Considérons le filtre qui est adapté au signal d'entrée $s_1(t) - s_2(t)$. A partir des équations (4.17) et (4.19), nous avons :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_0 = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_{b_0}^2} = \frac{E_d}{\eta/2} = \frac{2E_d}{\eta} \quad (4.26)$$

où $\eta/2$ est la densité spectrale du bruit à l'entrée du filtre et E_d est l'énergie de la différence des signaux à l'entrée du filtre, soit :

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt \quad (4.27)$$

Ainsi, en utilisant les équations (4.16) et (4.26), nous obtenons :

$$P_c = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_{b_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2\eta}}\right) \quad (4.28)$$

4.5 Evaluation de la probabilité d'erreur dans un système de transmission binaire

En utilisant l'équation (4.28), les probabilités d'erreur de différents systèmes de transmission binaire sont évaluées dans la section suivante.

4.5.1 Signal bande de base unipolaire

Le signal codé en bande de base unipolaire est défini par :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A, & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.29)$$

La probabilité d'erreur est donc :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad (4.30)$$

où $E_b = A^2 T / 2$ est l'énergie moyenne du signal par bit.

4.5.2 Signal bande de base bipolaire

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +A, & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = -A, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.32)$$

La probabilité d'erreur est donc :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad (4.33)$$

où $E_b = A^2 T$ est l'énergie moyenne du signal par bit.

4.5.3 Signal en modulation d'amplitude

Le signal codé en modulation d'amplitude est défini par :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_p t, & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.34)$$

Avec T un nombre entier de fois $1/f_p$. La probabilité d'erreur est donc :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{4\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad (4.35)$$

où $E_b = A^2 T / 4$ est l'énergie moyenne du signal par bit.

4.5.4 Signal en modulation de phase

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_p t, & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos(\omega_p t + \pi), & 0 \leq t \leq T \\ \quad = -A \cos \omega_p t \end{cases} \quad (4.36)$$

Avec T un nombre entier de fois $1/f_p$. La probabilité d'erreur est donc :

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \quad (4.37)$$

où $E_b = A^2 T / 2$ est l'énergie moyenne du signal par bit.

4.5.5 Signal en modulation de fréquence

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A \cos \omega_1 t, & 0 \leq t \leq T \\ s_2(t) = A \cos \omega_2 t, & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.38)$$

Si nous supposons que $\omega_1 T \gg 1$, $\omega_2 T \gg 1$, et $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$, alors la probabilité d'erreur est donnée par :

$$P_e \approx Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \quad (4.39)$$

où $E_b = A^2 T / 2$ est l'énergie moyenne du signal par bit.

5. Transmission sur onde porteuse

5.1 Introduction

La conception d'un système de transmission est liée aux propriétés du canal de transmission et aux objectifs souhaités (délais de transmission autorisé, taux d'erreurs, ...). En pratique, on rencontre un très grand nombre de canaux de transmission qu'il est possible de séparer en deux grandes familles selon que la transmission soit guidée ou non guidée.

Dans le cas des transmissions guidés, les ondes électromagnétiques sont guidées par le support de transmission. On distingue les canaux de propagation suivants :

- les paires torsadées : par exemple la ligne téléphonique qui permet de réaliser chez l'usagé des communications voix et maintenant du transfert de données dit "haut débit". On peut également citer les réseaux informatiques (Ethernet, ...).
- les câbles coaxiaux : utilisés pour les réseaux informatiques et pour la télévision numérique chez le particulier. Ce support permet d'atteindre des débits théoriques beaucoup plus élevés que la paire torsadée.
- les fils électriques : on utilise le réseau électrique pour réaliser des transmissions de données de quelques kbit/s à plusieurs dizaines de Mbit/s (CPL courant porteur en ligne ou PLC power line communication en anglais).
- la fibre optique : elle permet d'atteindre les débits les plus élevés mais est plutôt réservée aux infrastructures à cause de son manque de souplesse.

Dans ces systèmes de transmission, l'énergie électromagnétique est transmise au médium par l'intermédiaire d'antennes. Ce type de transmission s'est beaucoup développé et continue à croître malgré les difficultés techniques. Quelques exemples d'applications :

- le téléphone fixe sans fil (DECT, ...)
- les communications par satellite
- les systèmes de radiocommunication cellulaires : radio mobile (2G,3G, ...)
- les réseaux locaux LAN (Wifi)
- les systèmes bas cout faible puissance (bluetooth, Zigbee, UWB, ...) permettant de faire communiquer des équipements électroniques entre eux.
- le canal ionosphérique : dans la bande HF, transmission longue distance utilisant les réflexions sur les couches ionosphériques

5.2 Définition de la modulation et démodulation

La transmission des signaux se fait habituellement dans leurs bandes de fréquences initiales. On parle de transmission en **bande de base**. Parfois, la transmission en bande de base n'est pas optimale voire impossible car le canal présente de mauvaises caractéristiques à ces fréquence (bruit important, antennes d'émission/réception trop larges ...) ou il est impossible de partager le canal entre plusieurs utilisateurs sans que ceux-ci interfèrent ou même si on souhaite envoyer l'information sur de longues distances. Dans ce cas, une modulation est nécessaire car elle permet de transposer le signal initial de la bande de base à une bande de fréquence plus haute, sans modifier le contenu informatif du message, comme le décrit la figure 5.1 (dans ce qui suit, seul la partie positive de l'axe des fréquences est représenté). Le signal informatif est appelé **signal modulant**, il modifie en temps réel une ou plusieurs caractéristiques (amplitude, fréquence, phase) d'un autre signal simple appelé **porteuse**. La porteuse est en général un signal sinusoïdal. Le signal résultant de la modulation est appelé **signal modulé**. L'opération inverse de la modulation est appelée démodulation. **La modulation permet d'adapter les caractéristiques du signal au medium de transmission.**

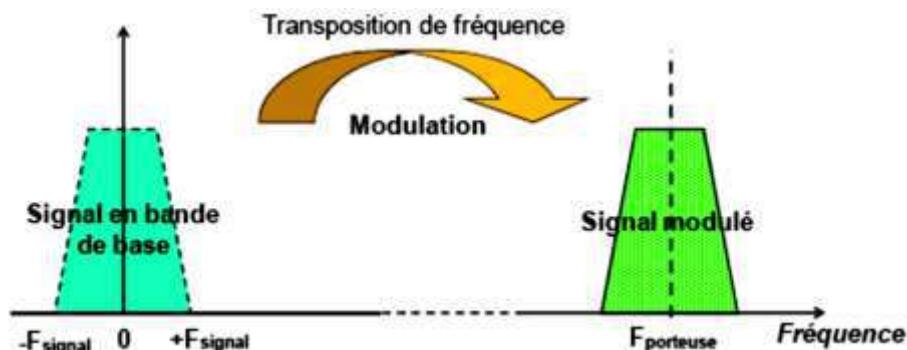


Figure 5.1- Modulation et transposition de fréquence

Lors de construction d'un système des communications, trouver le meilleur compromis entre les divers paramètres de système est fondamental. Les objectifs du constructeur peuvent être les suivants :

- maximiser l'efficacité spectrale ;
- minimiser le taux d'erreurs pas bit ;
- minimiser la puissance émise ;
- minimiser la bande passante ;
- améliorer la qualité de service, c'est-à-dire accepter le maximum utilisateurs avec le minimum d'interférences créées entre eux ;
- minimiser la complexité du système, etc.

5. Transmission sur onde porteuse

Les types de modulation les plus rencontrés sont les suivants

- Modulation par déplacement d'amplitude MDA (Amplitude Shift KeyingASK)
- Modulation par Déplacement de Phase MDP (Phase Shift Keying PSK)
- Modulation par déplacement de Phase Différentiel MDPD (DifferentialPhase Shift Keying DPSK).
- Modulation d'amplitude de deux porteuses en quadrature MAQ (QuadratureAmplitude Modulation QAM).
- Modulation par Déplacement de Fréquence MDF (Frequency Shift KeyingFSK)

5.3 Expression du signal modulé

Le message à transmettre est issu d'une source binaire. Le signal modulant, obtenu après codage est un signal en bande de base, éventuellement complexe qui s'écrit sous la forme :

$$x(t) = \sum_k C_k g(t - kT_s) = u_a(t) + j u_b(t)$$

Où

- ✓ $C_k = a_k + j b_k$: $u_a(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$, $u_b(t) = \sum_k b_k g(t - kT_s)$
- ✓ $\{C_k\}$ désigne une suite de symboles Maires, et $g(t)$ représentant une forme d'onde représente le code en ligne.
- ✓ Les symboles a_k, b_k prennent respectivement leurs valeurs dans l'alphabet $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ et $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

Dans les modulations MDA, MDP et MAQ, la modulation transforme le signal $x(t)$ en un signal modulé $x_{mod}(t)$ tel que :

$$S_{mod}(t) = \text{Re}[\mathbf{x}(t) \cdot e^{j(\omega_p t + \phi_0)}]$$

La fréquence $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ et la phase ϕ_0 caractérisant la sinusoïde porteuse utilisée pour la modulation. Si $x(t)$ est réelle la modulation est dite unidimensionnelle, et s'elle est complexe la modulation est dite bidimensionnelle.

Le signal modulé peut s'écrire aussi :

$$S_{mod}(t) = u_a(t) \cos(\omega_p t + \phi_0) - u_b(t) \sin(\omega_p t + \phi_0)$$

Le signal $u_a(t)$ module en amplitude la porteuse en phase $\cos(\omega_p t + \phi_0)$ et le signal $u_b(t)$ module en amplitude la porteuse en quadrature $\sin(\omega_p t + \phi_0)$.

5. Transmission sur onde porteuse

La figure 5.2 est la représentation dans le plan complexe qui fait correspondre à chaque signal élémentaire un point $C_k = a_k + jb_k$ permet de différencier chaque type de modulation. L'ensemble de ces points associés aux symboles porte le nom de **diagramme de constellation**.

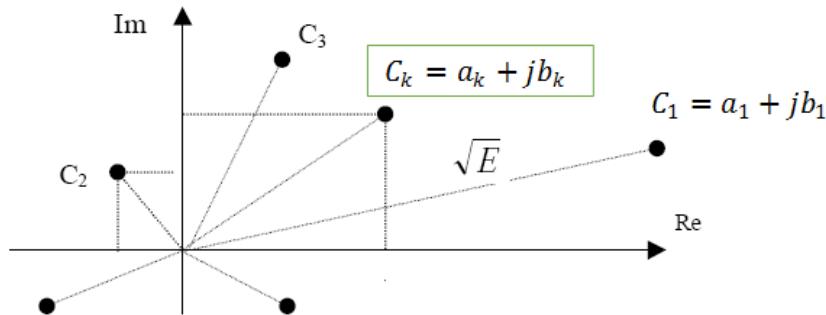


Figure 5.2- Diagramme de constellation numérique

Pour pouvoir distinguer deux symboles, il faut respecter une distance minimale d_{min} , entre les points représentatifs de ces symboles. Plus cette distance est grande et plus la probabilité d'erreur sera faible. La distance minimale entre tous les symboles est :

$$d_{min} = \text{Min}(d_{ij}), d_{ij} = |C_i - C_j|^2 = \left| \sqrt{(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2} \right|^2$$

On doit éloigner les symboles au maximum pour diminuer la probabilité d'erreur et d'autre part, de les rapprocher de l'origine pour minimiser l'énergie nécessaire à la transmission.

Le schéma théorique du modulateur est donné par la figure 5.3

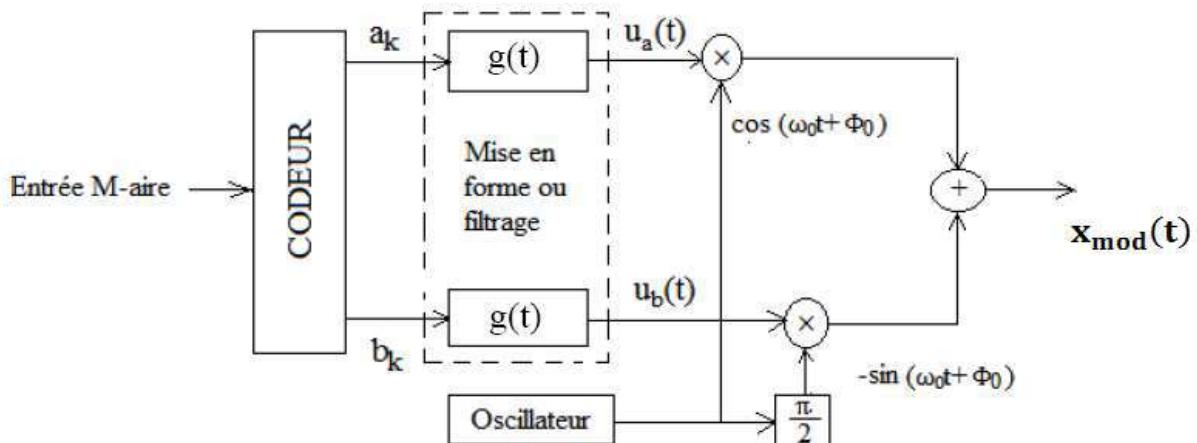


Figure 5.3- Forme générale d'un modulateur

La densité spectrale de puissance (DSP) du signal modulé $S_{mod}(t)$ se déduit de la DSP du signal en bande de base $x(t)$ par l'équation suivante :

$$S_{mm}(f) = \frac{1}{2} [S_{xx}(f - f_p) + S_{xx}(-f - f_p)]$$

Où $S_{xx}(f)$ est la DSP du signal en bande de base.

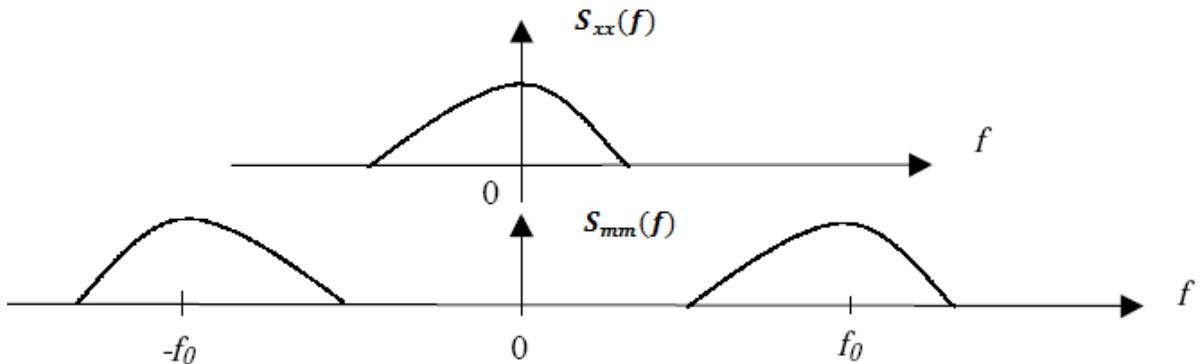


Figure 5.4- Densité spectrale de puissance du signal en bande de base et le signal modulé

Lorsque la modulation est linéaire, l'opération de modulation a pour effet dans la plupart des cas de translater la densité spectrale de puissance (DSP) du signal modulant. Ainsi, la DSP du signal modulé $S_{mod}(t)$ est aussi liée à la forme de l'onde $g(t)$, par sa transformée de Fourier $G(f)$.

3.4 Modulation par déplacement d'amplitude

Les Modulations par Déplacement d'amplitude (MDA) sont aussi souvent appelées par leur abréviation anglaise : ASK pour "Amplitude Shift Keying".

Dans ce cas, la modulation ne s'effectue que sur la porteuse en phase $\cos(\omega_p t + \phi_0)$. Il n'y a pas de porteuse en quadrature. Cette modulation est parfois dite mono dimensionnelle. Le signal modulé s'écrit alors :

$$S_{ASK}(t) = u_a(t) \cos(\omega_p t + \phi_0)$$

$$S_{ASK}(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s) \cos(\omega_p t + \phi_0)$$

Généralement, La forme de l'onde $g(t)$ est rectangulaire, de durée T_s et d'amplitude égale à A si t appartient à l'intervalle $[0, T_s[$ et égale à 0 ailleurs.

5.4.1 Modulation par tout ou rien (B-ASK unipolaire)

Un exemple de modulation d'amplitude est la modulation (binaire) par tout ou rien encore appelée par son abréviation anglaise : OOK pour « On Off Keying ».

Dans ce cas, un seul bit est transmis par période temps bit. Le symbole a_k prend sa valeur dans l'alphabet $\{0,1\}$.

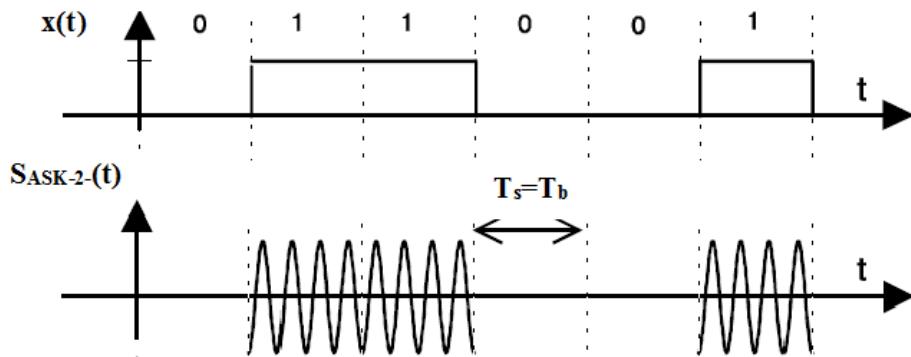


Figure 5.5- Modulation d'amplitude par tout ou rien (OOK)



Figure 5.6- Constellation de la modulation d'amplitude par tout ou rien (OOK)

La densité spectrale de puissance du signal en bande de base est donnée par :

$$S_{xx}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \text{sinc}^2(f T_b) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$

Donc, la densité spectrale de puissance du signal modulé aura comme expression :

$$S_{mm}(f) = \frac{A^2}{16} \left[T_b \text{sinc}^2((f - f_p) T_b) + T_b \text{sinc}^2((f + f_p) T_b) + \delta(f - f_p) + \delta(f + f_p) \right]$$

5. Transmission sur onde porteuse

Les figures 5.7 et 5.8 représentent les densités spectrales de puissance du signal en bande de base et du signal modulé.

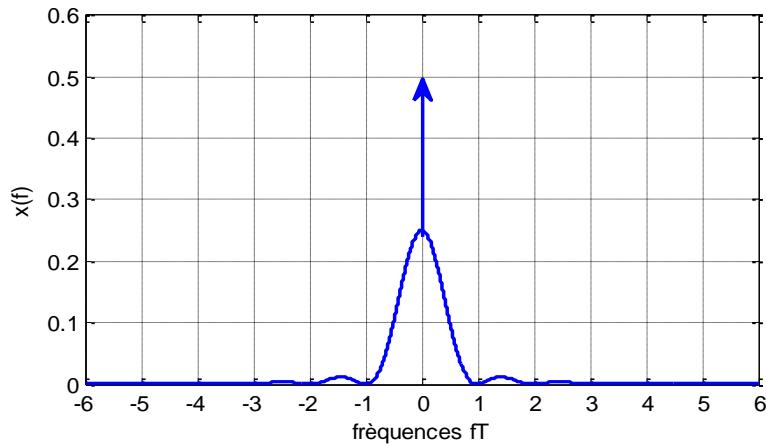


Figure 5.7- DSP du signal en bande de base

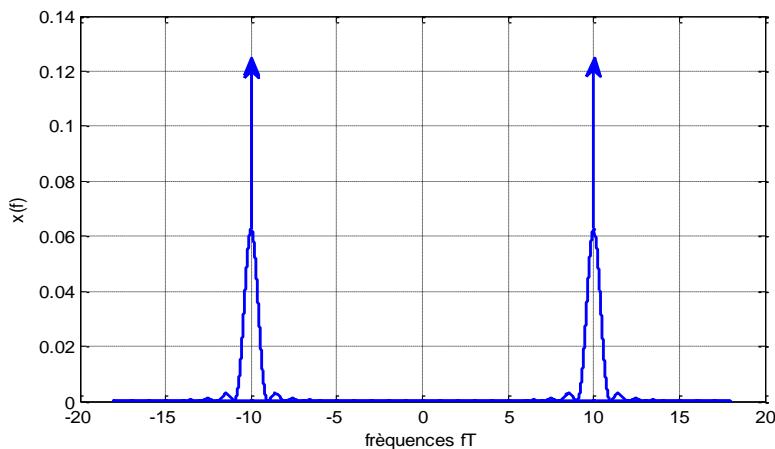
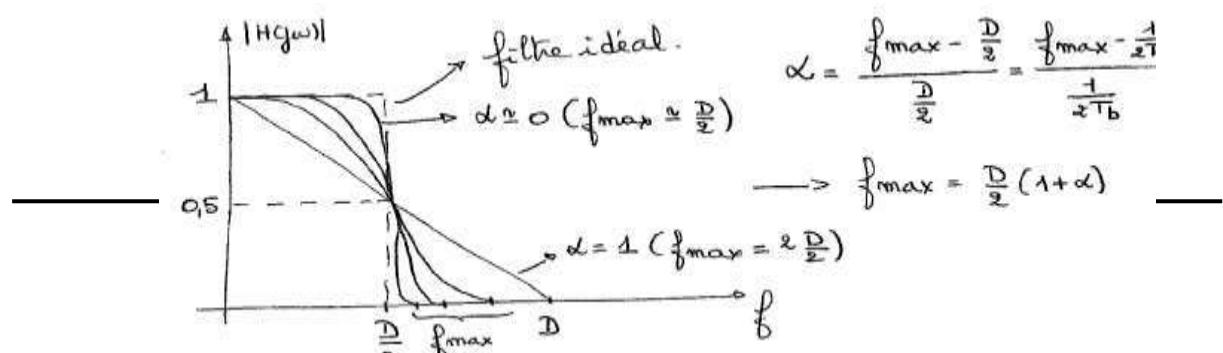


Figure 5.8- DSP du signal Modulé en OOK

Le spectre du signal modulé en ASK est théoriquement INFINI mais on sait que l'amplitude diminue. Pour qu'il n'aura pas IES il faut filtrer le signal en bande de base par un filtre en cosinus sur élevé.

$$B_{MASK} = 2f_{max} = 2 \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right) \left(\frac{D_b}{\log_2(M)} \right) = D_b (1 + \alpha)$$



5.4.2 Modulations à « M-états »

5.4.2.A Les constellations M-ASK

On a toujours $M = 2^n$ amplitudes possibles du signal, mais ici les valeurs de l'alphabet sont telles que :

$$A_i = [2i - (M + 1)]a_0, \quad i \in [1, M]$$

Suivant les valeurs de n on obtient le tableau suivant :

n	M	Valeurs de l'alphabet
1	2	$-1a_0, 1a_0$
2	4	$-3a_0, -1a_0, 1a_0, 3a_0$
3	8	$-7a_0, -5a_0, -3a_0, -1a_0, 1a_0, 3a_0, 5a_0, 7a_0$

La constellation de la modulation à M états symétriques est donnée figure 5.9 pour M prenant comme valeurs 2, 4 et 8.

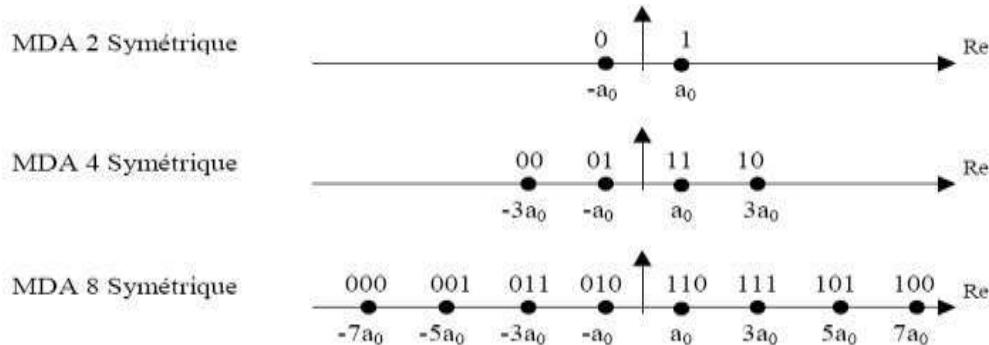


Figure 5.8- Constellation de la modulation d'amplitude à M états

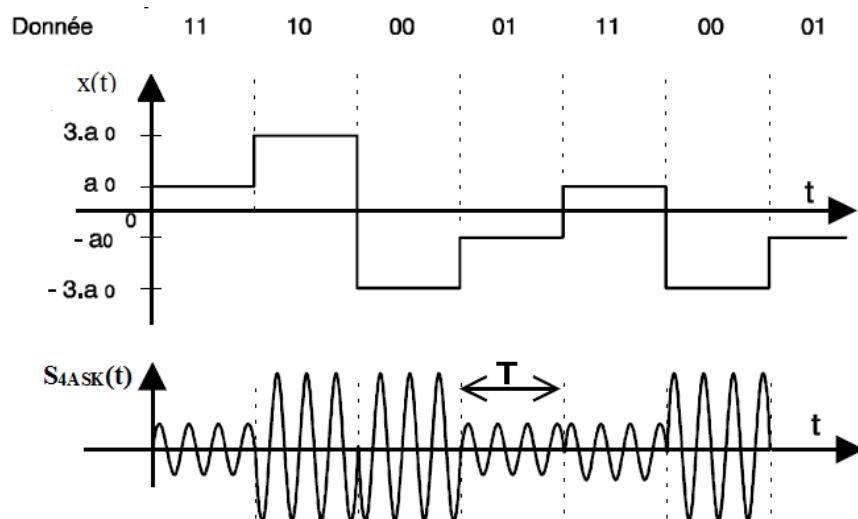


Figure 5.9- Modulation d'amplitude MDA 4

5. Transmission sur onde porteuse

5.4.2.B Spectre du signal M-ASK

Le spectre du signal en bande de base ne présente pas de raie et s'écrit :

$$S_{xx}(f) = A^2 \frac{M^2 - 1}{3} T_s \left| \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} \right|^2$$

Le spectre du signal modulé est le même décalé de $\pm f_p$.

5.4.3.C Modulateur et démodulateur M-ASK

Les figures 5.11 et 5.12 montrent respectivement un synoptique simplifié de la modulation et de la démodulation cohérente sur une seule porteuse.

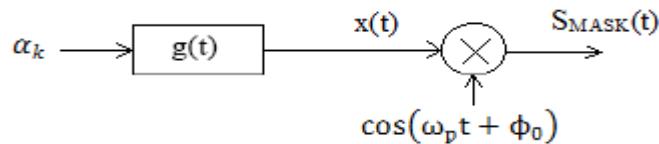


Figure 5.10- Modulateur ASK

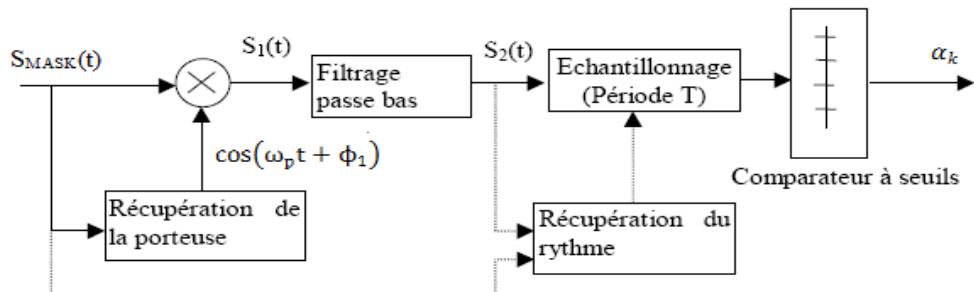


Figure 5.11- démodulateur ASK Synchrone

En absence du bruit, le signal reçu est :

$$S_{ASK}(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s) \cos(\omega_p t + \phi_0)$$

La multiplication de ce signal reçu par une onde sinusoïdale issue d'un oscillateur local :

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \sum_k a_k g(t - kT_s) [\cos(2\omega_p t + \phi_0 + \phi_1) + \cos(\phi_0 - \phi_1)]$$

Le terme en $\cos(2\omega_p t + \phi_0 + \phi_1)$ sera éliminé par filtrage pour obtenir le signal :

$$S_2(t) = \frac{1}{2} \sum_k a_k g(t - kT_s) \cos(\phi_0 - \phi_1)$$

5. Transmission sur onde porteuse

Si le récepteur dispose d'un oscillateur local synchronisé en fréquence et en phase sur celui de l'émission, $\phi_0 = \phi_1$ sera voisine de ϕ_1 et le signal $S_2(t)$ représente alors le signal porteur d'information

$$S_2(t) = \frac{1}{2} \sum_k a_k g(t - kT_s)$$

5.4.2.B Performance du modulation M-ASK

Pour pouvoir comparer les différentes modulations entre elles, il est d'usage d'exprimer la probabilité d'erreur en fonction du rapport $\frac{E_b}{N_0}$ dans lequel :

E_b représente l'énergie émise par bit,

N_0 représente la densité spectrale de puissance de bruit.

La probabilité d'erreur binaire du modulation M-ASK est donnée par la relation :

$$P_e = \frac{M-1}{M \log_2 M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M^2 - 1 N_0}} \right) = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M E_b}{M^2 - 1 N_0}} \right)$$

Cette probabilité d'erreur par symbole P_e est tracée en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ et du paramètre M à la figure 5.13.

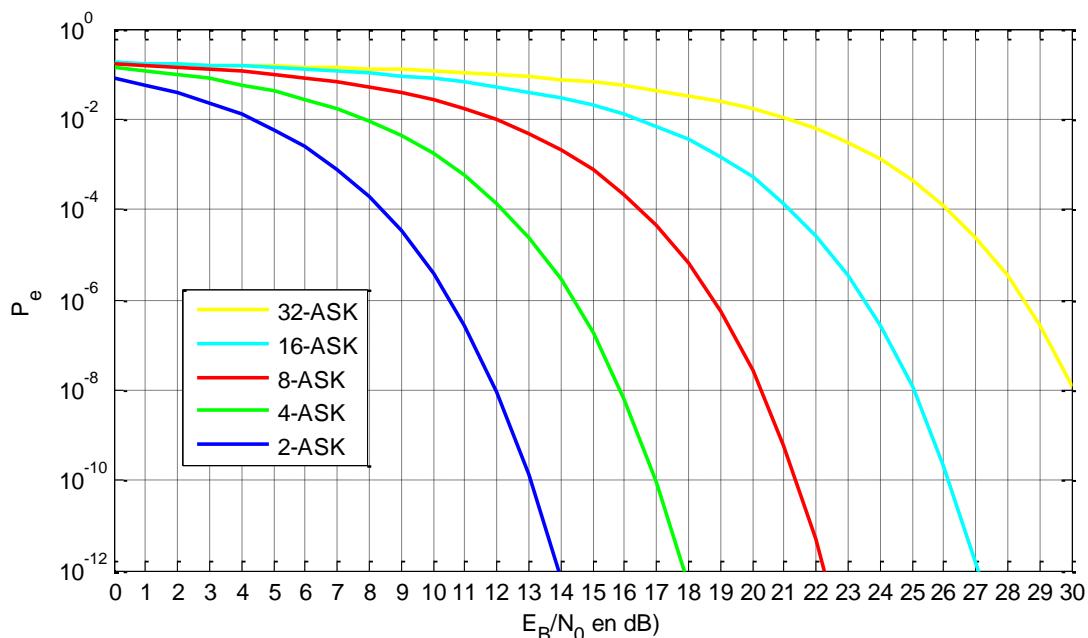


Figure 5.12- Probabilité d'erreur pour des Modulation M-ASK

5. Transmission sur onde porteuse

On peut alors constater que pour conserver une probabilité d'erreur par bit constante lorsque M augmente, il faut aussi augmenter le rapport $\frac{E_b}{N_0}$. Autrement dit, il faut augmenter l'énergie émise par bit E_b . Pour $M = 4$, le rapport $\frac{E_b}{N_0}$ nécessaire à une probabilité d'erreur donnée est 4 dB plus grand que pour $M = 2$.

Lorsqu'on augmente M (c'est-à-dire le nombre de bits transmis par symbole) on remarque que l'efficacité spectrale ($\eta = \frac{1}{T_s B} \log_2(M)$) augmente (pour une largeur de bande B donnée). Mais la probabilité d'erreur P_e augmente aussi, et pour ne pas dégrader, il sera nécessaire d'augmenter l'énergie émise par bit E_b .

Ce type de modulation est simple à réaliser mais est assez peu employé pour $M > 2$ car ses performances sont moins bonnes que celles d'autres modulations, notamment pour sa résistance au bruit.

5.5 Modulation par déplacement de phase (MDP)

Les Modulations par Déplacement de phase (MDP) sont aussi souvent appelées par leur abréviation anglaise: PSK pour "Phase Shift Keying".

Reprendons l'expression générale d'une modulation numérique

$$S_{\text{mod}}(t) = \Re[x(t) \cdot e^{j(\omega_p t + \phi_0)}] = \Re \left[\sum_k c_k g(t - kT_s) e^{j(\omega_p t + \phi_0)} \right]$$
$$c_k = a_k + j b_k = e^{j(\varphi_k)}$$

d'où : $a_k = \cos(\varphi_k)$, $b_k = \sin(\varphi_k)$

Pour ce type de modulation et afin d'améliorer les performances par rapport au bruit, les symboles c_k sont répartis sur un cercle de façons régulier de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varphi_k = (2k + 1) \frac{\pi}{M} & k = 0, 1, \dots, M - 1 \text{ si } M > 2 \\ \varphi_k = 0 \text{ ou } \pi & \text{si } M = 2 \end{cases}$$

On peut aussi considérer que a_k et b_k prennent simultanément leurs valeurs dans l'alphabet $\cos(\varphi_k)$, } et $\sin(\varphi_k)$.

Le signal modulé devient :

5. Transmission sur onde porteuse

$$\begin{aligned}
 S_{\text{mod}}(t) &= \Re \left[\sum_k c_k g(t - kT_s) e^{j(\omega_p t + \phi_0)} \right] = \Re \left[\sum_k e^{j(\varphi_k)} g(t - kT_s) e^{j(\omega_p t + \phi_0)} \right] \\
 &= \Re \left[\sum_k g(t - kT_s) e^{j(\omega_p t + \phi_0 + \varphi_k)} \right]
 \end{aligned}$$

Soit, plus simplement, en ne considérant que l'intervalle de temps $[k, (k + 1)T_s[$

$$S_{\text{mod}}(t) = \Re [A e^{j(\omega_p t + \phi_0 + \varphi_k)}]$$

Cette dernière expression montre que la phase de la porteuse est modulée par l'argument φ_k de chaque symbole ce qui explique le nom donné à la MDP.

$$S_{\text{M-PSK}}(t) = A \cos(\varphi_k) \cos(\omega_p t + \phi_0) - A \sin(\varphi_k) \sin(\omega_p t + \phi_0)$$

Remarques importantes

- La porteuse en phase $\cos(\omega_p t + \phi_0)$ est modulée en amplitude par le signal $A \cos(\varphi_k)$ et que la porteuse en quadrature $\sin(\omega_p t + \phi_0)$ est modulée en amplitude par le signal $A \sin(\varphi_k)$.
- L'expression de la MDP montre qu'il s'agit d'une modulation à enveloppe constante ; l'enveloppe étant le module de l'enveloppe complexe. Cette propriété est intéressante pour des transmissions sur des canaux non linéaires, ce qui fait de la MDP un outil de choix par exemple pour les transmissions par satellites.
- La disposition des symboles sur un cercle de façons régulier se traduit par une énergie identique mise en œuvre pour transmettre chaque symbole,

La figure 5.14 montre différentes constellations de MDP pour $M= 2, 4$ et 8 .

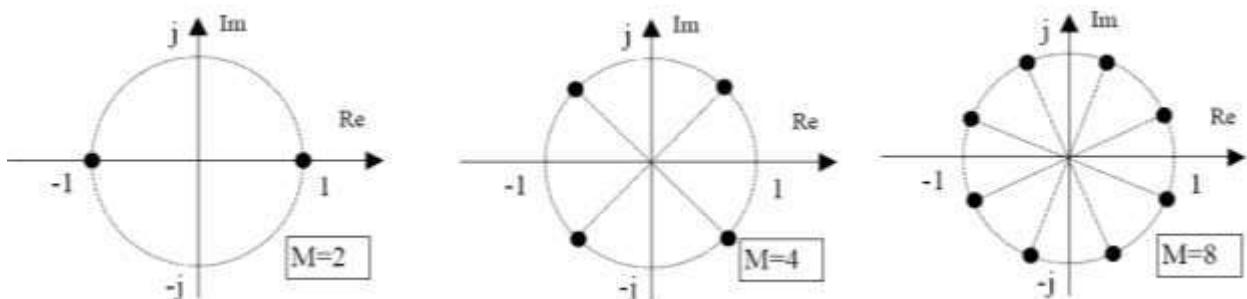


Figure 5.13- Constellation des symboles en modulation de phase MDP-M(M-PSK)

5.5.1 Modulation MDP-2

Un exemple de modulation MDP-M est la modulation MDP-2 encore appelée par son abréviation anglaise : BPSK pour "Binary Phase shift Keying".

C'est une modulation binaire (un seul bit est transmis par période T) : $n=1$, $M=2$ et $\varphi_k = 0$ ou π

Le symbole $c_k = e^{j(\varphi_k)}$ prend donc sa valeur dans l'alphabet $\{-1, 1\}$.

Ici, la modulation ne s'effectue que sur la porteuse en phase $\cos(\omega_p t + \phi_0)$. C'est une modulation mono dimensionnelle. Le signal modulé s'écrit alors pour t appartenant à l'intervalle $[0, T_b[$: $S_{\text{BPSK}}(t) = \pm A \cos(\varphi_k) \cos(\omega_p t + \phi_0)$.

La constellation MDP-2 est représentée figure 5.14. On remarquera que cette modulation est strictement identique à la modulation MDA-2 symétrique.

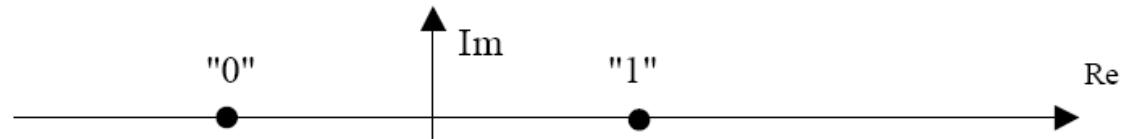
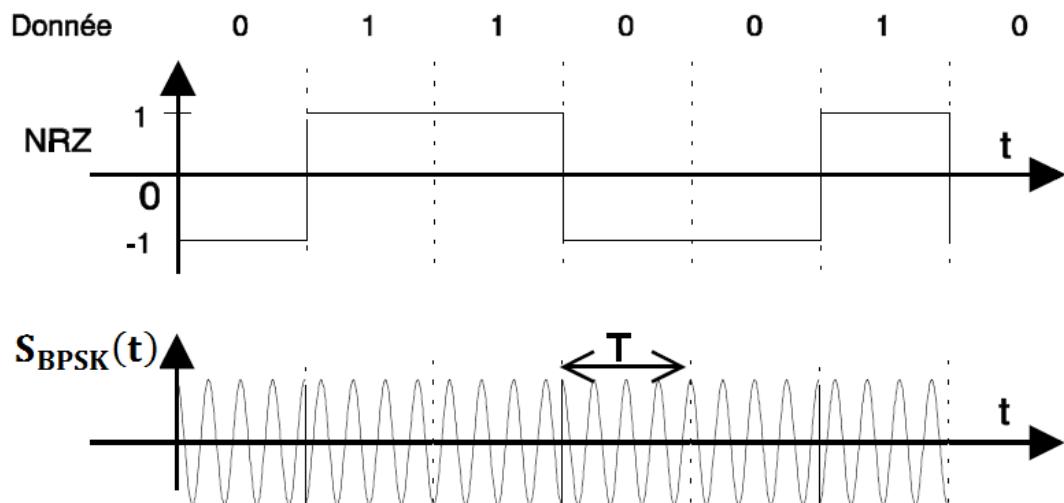


Figure 5.14- Constellation de la modulation de phase MDP-2

5.5.1.A Chronogramme de LA "MDP-2"



5. Transmission sur onde porteuse

Figure 5.15- Chronogramme de la modulation de phase MDP-2

5.5.1.B Modulation et démodulation

Le modulateur représenté figure 16 est constitué d'un multiplicateur qui effectue le changement de fréquence sur un train numérique codé en NRZ.

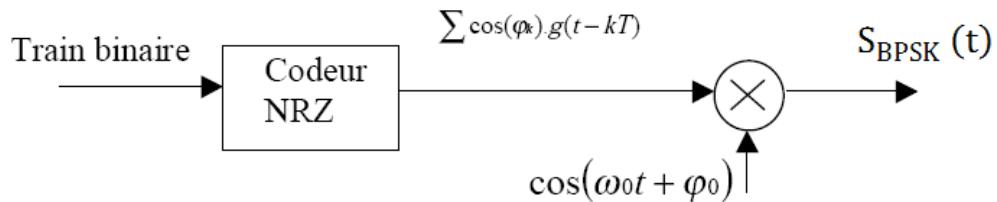


Figure 5.16- Modulateur BPSK

Le récepteur requiert l'utilisation d'une démodulation cohérente : (voir figure 5.17 le synoptique simplifié du démodulateur MDP-2).

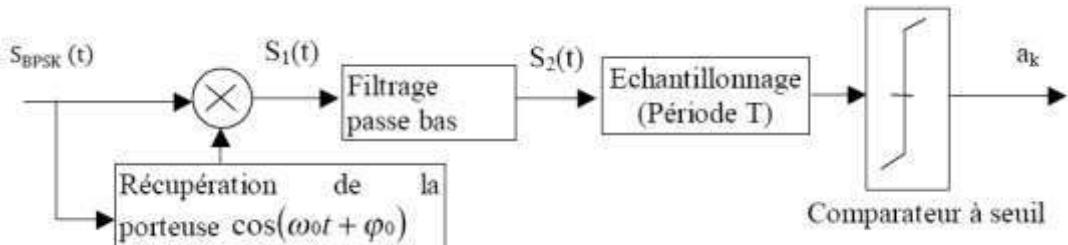


Figure 5.17- Démodulateur BPSK cohérent

Soit le signal non bruité reçu par le récepteur dans l'intervalle de temps $[kT_b, (k+1)T_b[$

$$S_{BPSK}(t) = \pm A \cos(\varphi_k) \cos(\omega_p t + \phi_0)$$

Après multiplication avec la porteuse récupérée, on obtient :

$$S_1(t) = \pm A \cos(\varphi_k) \cos^2(\omega_p t + \phi_0)$$

$$= \pm \frac{A}{2} \cos(\varphi_k) [1 + \cos(2\omega_p t + \phi_0)]$$

Soit, après filtrage pour éliminer la composante à la fréquence $2f_p$

$$S_2(t) = \pm \frac{A}{2} \cos(\varphi_k)$$

5. Transmission sur onde porteuse

Le récepteur doit encore récupérer le rythme des symboles transmis, puis échantillonner le signal $S_2(t)$ au milieu de chaque période. Suivant le symbole émis -1 ou 1, φ_k prend la valeur π ou 0 et le signe de $S_2(t)$ devient négatif ou positif mettant en évidence la donnée binaire reçue "0" ou "1".

5.5.1.C Le spectre de la "MDP-2"

La densité spectrale de puissance du signal en bande de base est donnée par :

$$S_{xx}(f) = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2(f T_b)$$

Donc, la densité spectrale de puissance du signal modulé aura comme expression :

$$S_{mm}(f) = \frac{A^2}{4} \left[T_b \operatorname{sinc}^2((f - f_p) T_b) + T_b \operatorname{sinc}^2((f + f_p) T_b) \right]$$

Les figures 5.18 et 5.19 représentent les densités spectrales de puissance du signal en bande de base et du signal modulé

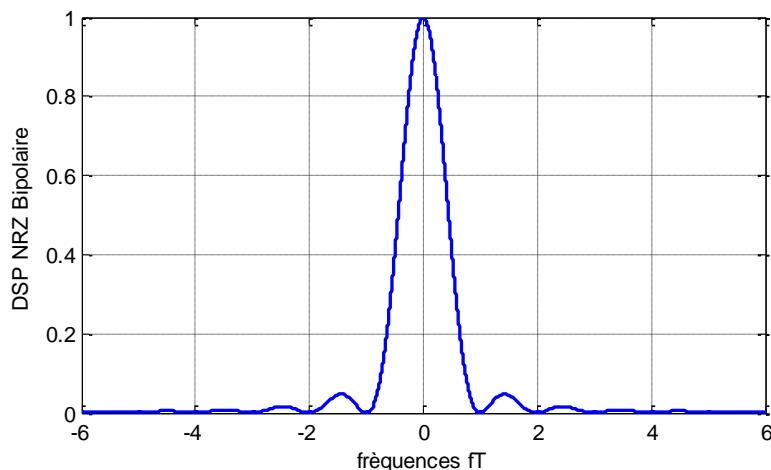


Figure 5.18- spectre du signal en bande de base

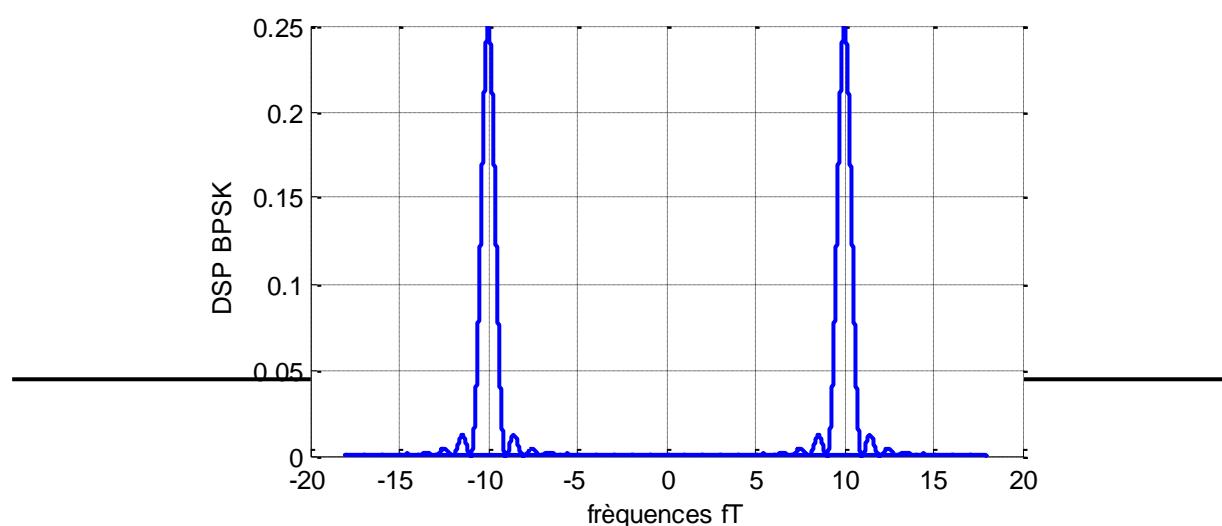


Figure 5.19- DSP du signal BPSK

5.5.2 Modulation MDP-4

Un autre exemple de modulation MDP-M est la modulation MDP-4 encore appelée par son abréviation anglaise : QPSK pour "Quadrature Phase shift Keying".

C'est une modulation d'amplitude à deux niveaux sur chacune des porteuses en quadrature.

Dans ce cas :

$$n = 2, M = 4, \quad \varphi_k = (2k + 1) \frac{\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Les bits du train binaire entrant sont groupés par deux pour former des symboles correspondant aux c_k qui prennent alors leurs valeurs dans un alphabet de 4 éléments suivant :

$$c_k = a_k + jb_k = e^{j(\varphi_k)}, \varphi_k \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

a_k et b_k prennent simultanément leurs valeurs dans l'alphabet $\cos(\varphi_k)$ et $\sin(\varphi_k)$.

Le tableau suivant précise les différentes valeurs en fonction du symbole à transmettre :

Symbol	Bit impaire	Bit paire	φ_k	$a_k = \cos(\varphi_k)$	$b_k = \sin(\varphi_k)$
00	0	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
01	0	1	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
11	1	1	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
10	1	0	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S_{QPSK}(t) = A \cos(\varphi_k) \cos(\omega_p t + \phi_0) - A \sin(\varphi_k) \sin(\omega_p t + \phi_0)$$

Constellation MDP-4

La constellation MDP-4 est représentée figure 5.20. Elle montre que l'affectation des bits aux points de la constellation se fait en général selon un codage de Gray.

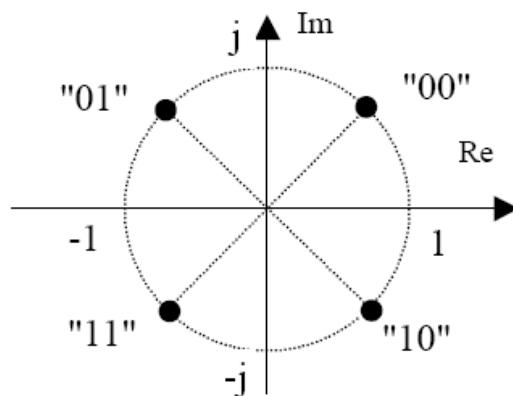


Figure 5.20- Constellation de la modulation de phase QPSK

5.5.2.B Chronogramme de MDP-4

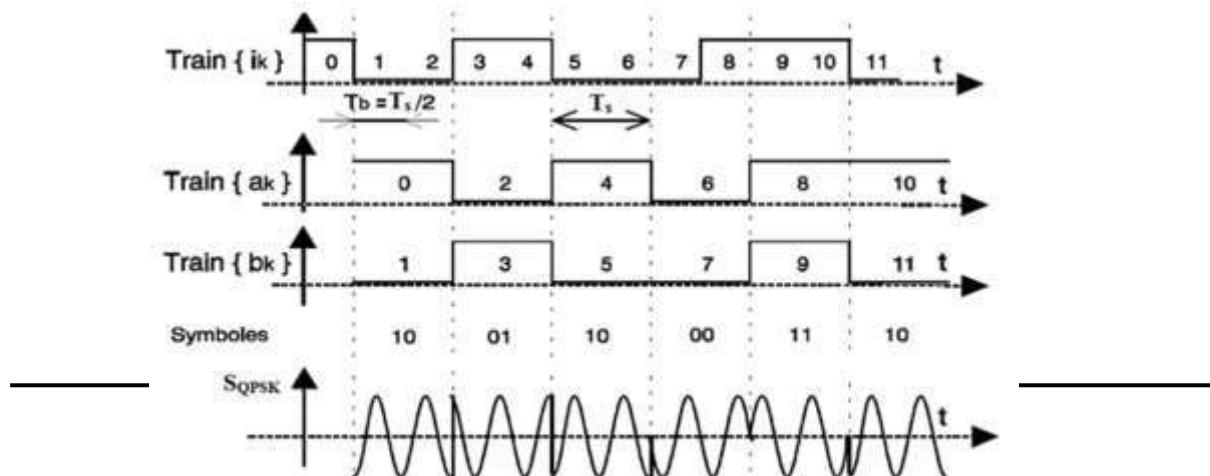
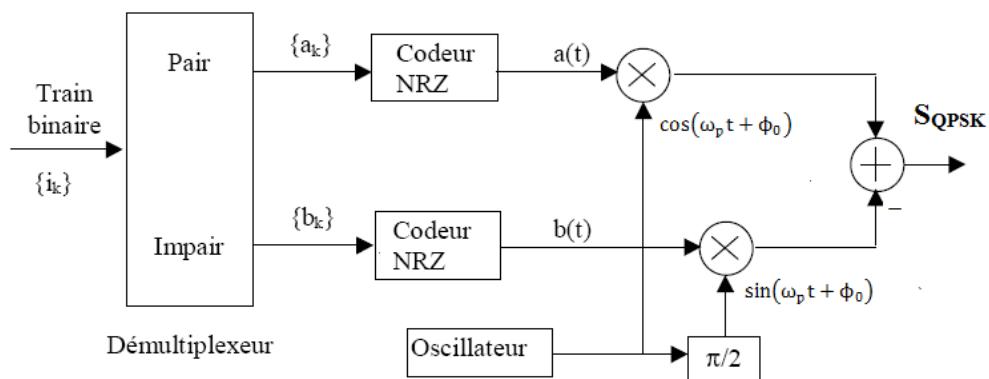


Figure 5.21- Chronogramme du QPSK

Modulation et démodulation



$$S_{QPSK}(t) = A\cos(\varphi_k)\cos(\omega_p t + \phi_0) - A\sin(\varphi_k)\sin(\omega_p t + \phi_0)$$

Figure 5.22- Modulateur QPSK

La démodulation cohérente est applicable lorsque le récepteur a une connaissance exacte de la fréquence et de la phase de la porteuse. Le schéma synoptique d'un démodulateur cohérent pour la MDP-4 est présenté à la figure 5.23.

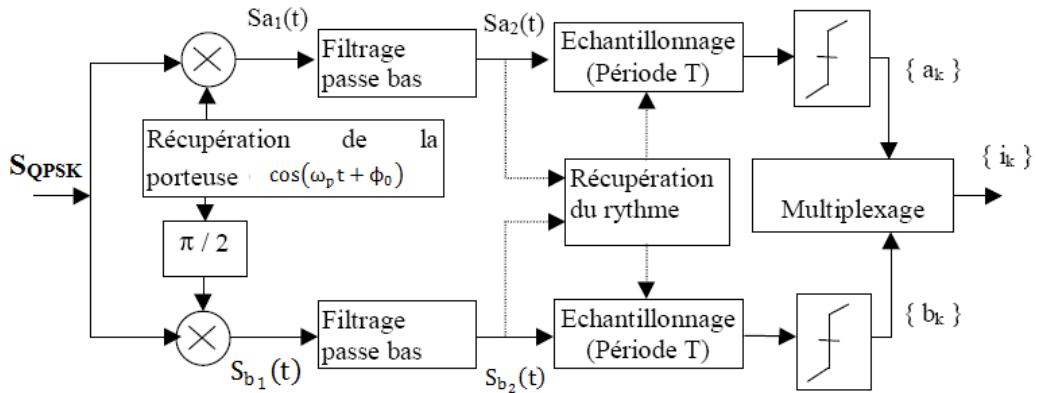


Figure 5.23- Démodulateur QPSK

Le démodulateur MDP-4 est essentiellement constitué de deux démodulateurs MDP-2. En effet, le signal reçu (après un filtrage passe-bande éventuel) est démodulé dans deux voies parallèles par deux porteuses en quadrature. Certaines techniques permettent de synchroniser l'oscillateur local avec la porteuse à l'émission. Le signal en quadrature est généré à partir de l'oscillateur local et d'un déphasage de $\pi/2$.

Soit $S_{QPSK}(t) = A\cos(\varphi_k)\cos(\omega_p t + \phi_0) - A\sin(\varphi_k)\sin(\omega_p t + \phi_0)$ le signal non bruité reçu par le récepteur dans l'intervalle de temps $[kT_s, (k+1)T_s]$. Pour la voie A et après multiplication avec la porteuse récupérée, on obtient :

$$S_{b_1}(t) = [A\cos(\varphi_k)\cos(\omega_p t + \phi_0) - A\sin(\varphi_k)\sin(\omega_p t + \phi_0)]\sin(\omega_p t + \phi_0)$$

Donc, après filtrage passe bas :

$$S_{a_2}(t) = \frac{A}{2} \cos(\varphi_k) = \frac{A \cdot a_k}{2}$$

De la même manière on obtient pour la voie B, et après filtrage passe bas :

$$S_{b_2}(t) = \frac{A}{2} \sin(\varphi_k) = \frac{A \cdot b_k}{2}$$

Le récepteur doit encore récupérer le rythme des symboles transmis, puis échantillonner les signaux $S_{a_2}(t)$ et $S_{b_2}(t)$ au milieu de chaque période. Les trains binaires $\{a_k\}$ et $\{b_k\}$ ainsi récupérés sont alors multiplexés pour obtenir le train binaire $\{i_k\}$.

5.5.3 Spectre et efficacité spectrale du Modulation MPSK

Pour une même rapidité de modulation $R = \frac{1}{T_s}$, le spectre du signal modulé de la MDP-M est identique à celui du signal MDP-2.

Toujours pour une même rapidité de modulation, le débit binaire, $D_b = \frac{1}{T_b}$ de la MDP-M est multiplié par $n = \log_2 M$ par rapport celui de la MDP-2. Autrement dit, pour un spectre identique (et donc largeur de bande B constante), l'efficacité spectrale $\eta = \frac{D_b}{B}$ est multiplié par $n = \log_2 M$

Le tableau ci-dessous montre le gain obtenu sur le débit binaire et sur l'efficacité spectrale pour diverses modulation MDP-M, ceci pour une même rapidité de modulation.

M	Modulation	Débits binaire	Efficacité spectrale
2	MDP	D_b	η
4	4-MDP	$2D_b$	2η
8	8-MDP	$8D_b$	8η
16	16-MDP	$16D_b$	16η

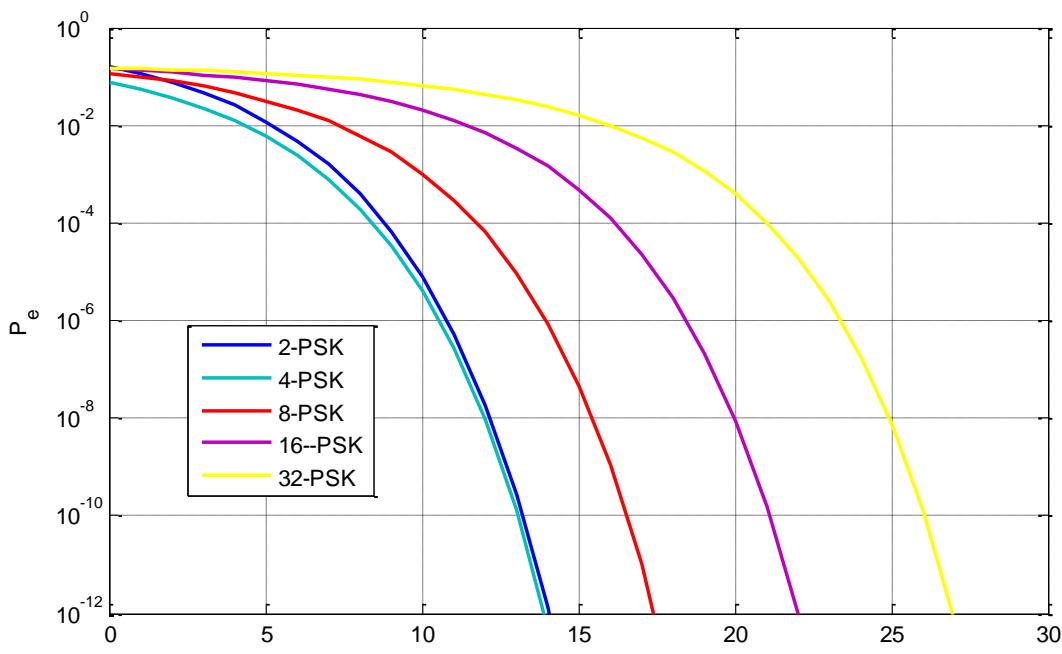
5.5.4 Les performances de la modulation MPSK

L'augmentation de M réduit la distance entre symboles adjacents sur la constellation et cela dégrade naturellement les performances.

5. Transmission sur onde porteuse

La probabilité d'erreur binaire est donnée par la relation :

$$P_e = \frac{1}{\log_2 M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\log_2 M \frac{E_b}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right) = \frac{2}{\log_2 M} Q \left(\sqrt{2 \log_2 M \frac{E_b}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right)$$



5.24- Probabilité d'erreur de la modulation MPSK

5.6 Modulation d'amplitude sur deux porteuses en quadrature (MAQ)

Les modulations d'amplitude sur deux porteuses en quadrature (MAQ) sont aussi appelées par le terme anglais : QAM pour "Quadrature Amplitude modulation". C'est une modulation dite bidimensionnelle.

La MDA et la MDP ne constituent pas une solution satisfaisante pour utiliser efficacement l'énergie émise lorsque le nombre de points M est grand. En effet, dans la MDA les points de la constellation sont sur une droite, et dans la MDP les points sont sur un cercle. Or, la probabilité d'erreur est fonction de la distance minimale entre les points de la constellation, et la meilleure modulation est celle qui maximise cette distance pour une puissance moyenne donnée. Un choix plus rationnel est alors une modulation qui répartit les points uniformément dans le plan.

Nous avons vu que le signal modulé $S_{\text{mod}}(t)$ peut s'écrire :

$$S_{\text{mod}}(t) = u_a(t) \cos(\omega_p t + \phi_0) - u_b(t) \sin(\omega_p t + \phi_0)$$

et que les deux signaux $u_a(t)$ et $u_b(t)$ ont pour expression :

$$u_a(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s) \text{ et } u_b(t) = \sum_k b_k g(t - kT_s)$$

Le signal modulé $S_{\text{mod}}(t)$ est donc la somme de deux porteuses en quadrature, modulées en amplitude par les deux signaux $u_a(t)$ et $u_b(t)$.

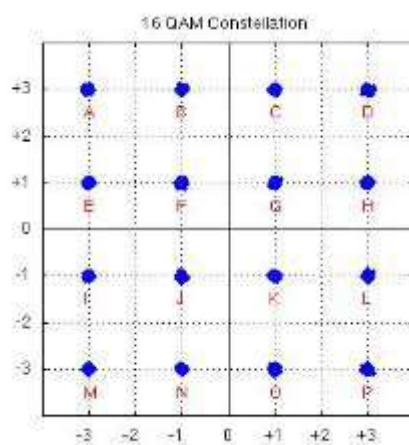
Constellations MAQ-M

Les symboles a_k et b_k prennent respectivement leurs valeurs dans deux alphabets à M éléments ($\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ et $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$) et donnant ainsi naissance à une modulation possédant un nombre $N = M^2$ états. Chaque état est donc représenté par un couple (a_k, b_k) . L'intérêt de cette configuration est que le signal $S_{\text{mod}}(t)$ est alors obtenu par une combinaison de deux porteuses en quadrature modulées en amplitude par des symboles a_k et b_k indépendants.

La MAQ-16 est construite à partir de symboles a_k et b_k qui prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{\pm d, \pm 3d\}$ où d est une constante donnée.

Plus généralement lorsque les symboles a_k et b_k prennent leurs valeurs dans l'alphabet $\{\pm d, \pm 3d, \pm 5d, \dots, \pm (M-1)d\}$ avec $M = 2^n$. on obtient une modulation à 2^{2n} états et une constellation avec un contour carré dont font partie la MAQ-4, la MAQ-16, la MAQ-64 et la MAQ-256.

La Figure 5.25 représente la constellation de la MAQ-16



5.25- Constellation de la MAQ-16

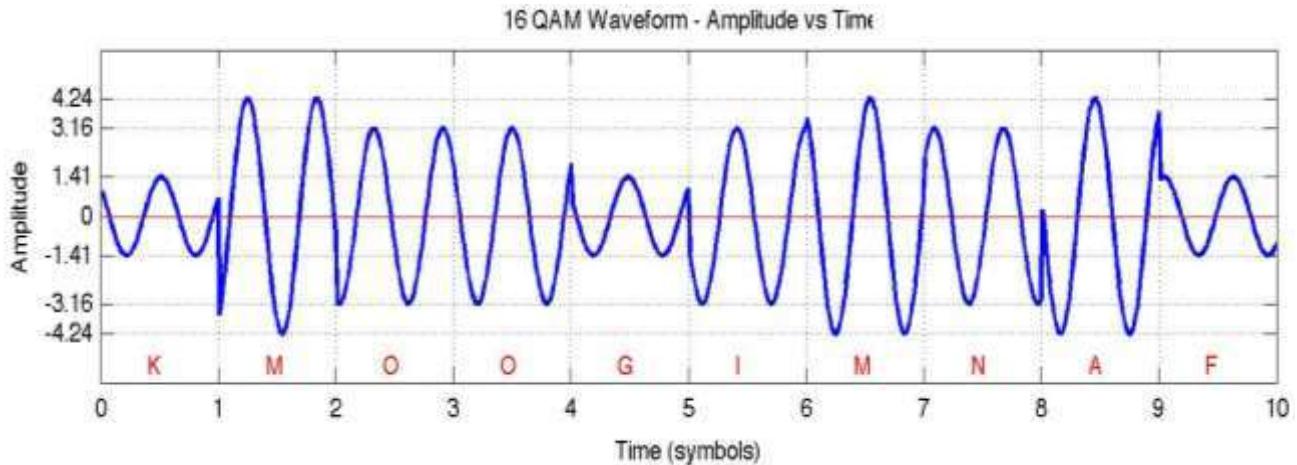


Figure 5.26- chronogramme 16 QAM

Efficacité spectrale du Modulation MPSK

Le tableau ci-dessous montre le gain obtenu sur le débit binaire et sur l'efficacité spectrale pour diverses modulation QAM, ceci pour une même rapidité de modulation.

M	Modulation	Débits binaire	Efficacité spectrale
2	QAM	D_b	η
4	4- QAM	$2D_b$	2η
8	8- QAM	$8D_b$	8η
16	16- QAM	$16D_b$	16η

Les performances de la modulation QAM

La probabilité d'erreur binaire est donnée par la relation :

$$P_e = \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \frac{3 \log_2 \sqrt{M}}{M - 1} \right) = 2 \frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M} \log_2 \sqrt{M}} Q \left(\sqrt{\frac{2 E_b}{N_0}} \frac{3 \log_2 \sqrt{M}}{M - 1} \right)$$

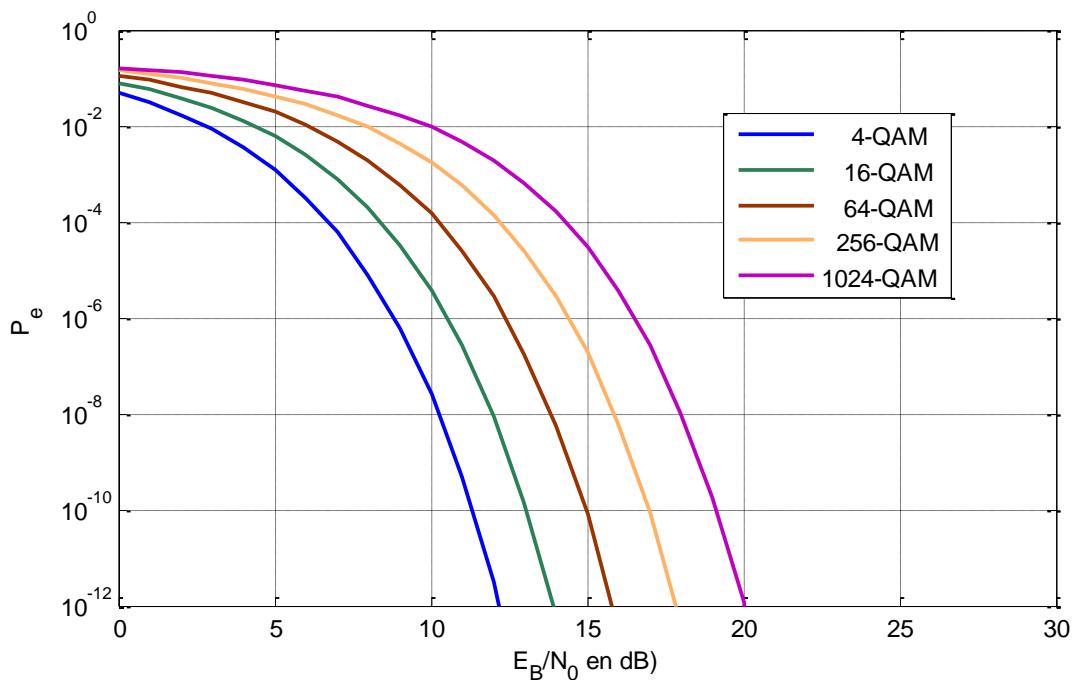


Figure 5.27- Probabilité d'erreur du QAM

5.7 Modulation par déplacement de fréquence (MDF)

Les Modulations par Déplacement de fréquence (**MDF**) sont aussi souvent appelées par leur abréviation anglaise : **FSK** pour "Frequency Shift Keying".

La fréquence instantanée du signal modulé peut prendre un certain nombre de valeurs associées aux états possibles de l'information à transmettre.

L'expression du signal modulé par déplacement de fréquence peut s'écrire :

$$S_{FSK}(t) = \cos(2\pi f_p t + \phi(t))$$

La fréquence instantanée du signal $S_{FSK}(t)$ est obtenue par **dérivation de la phase** $(2\pi f_p t + \phi(t))$ **par rapport au temps** :

$$f(t) = f_p + \frac{\Delta f}{2} a_k$$

Appelons Δf la différence de la *fréquence instantanée* correspondant à l'émission de deux symboles adjacents ; et a_k un symbole appartenant à l'ensemble $\{ \pm 1, \pm 3, \dots \pm (M-1) \}$.

L'expression du signal modulé devient :

$$S_{FSK}(t) = \cos \left(2\pi \left(f_p + \frac{\Delta f}{2} a_k \right) t \right)$$

On distingue deux cas importants : « Modulation MDF à phase continue » et « Modulation MDF à phase discontinue ».

5.7.1 La modulation MDF à phase discontinue

Dans les Modulations par Déplacement de fréquence, on trouve les MDF à phase discontinue pour lesquelles la phase aux instants de transition kT_s peut sauter brusquement.

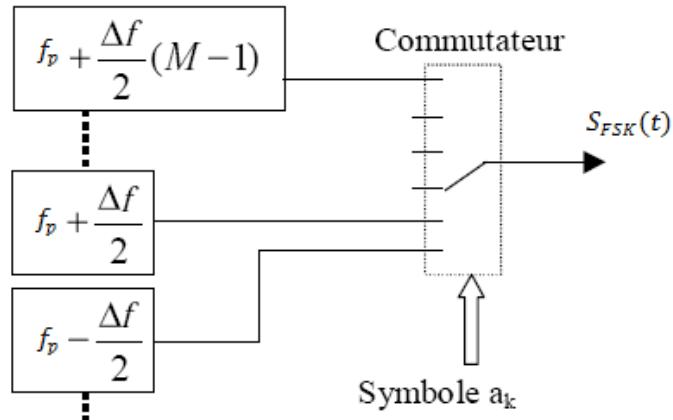


Figure 5.28- Modulateur FSK

Le modulateur MDF le plus simple, représenté figure 5.27, est constitué d'oscillateurs différents. La différence de fréquence entre deux oscillateurs voisins est Δf . La fréquence instantanée du signal modulé saute d'une valeur à l'autre à chaque changement de symbole. Ceci ne permet pas de garantir la continuité de phase de $S_{FSK}(t)$ et, par conséquent, le spectre occupé par ce type de modulation est très large. En effet, plus un signal est régulier, et plus son spectre décroît rapidement. L'intérêt de la MDF à phase discontinue réside dans la simplicité de réalisation du modulateur et dans la possibilité d'une démodulation non cohérente.

Exemple: MDF binaire à phase discontinue

Dans le cas d'une MDF binaire, a_k prend sa valeur dans l'alphabet $\{-1, 1\}$ en fonction de la donnée "0" ou "1" à transmettre. Un chronogramme est présenté figure 5.28 où l'on observe les discontinuités de phase.

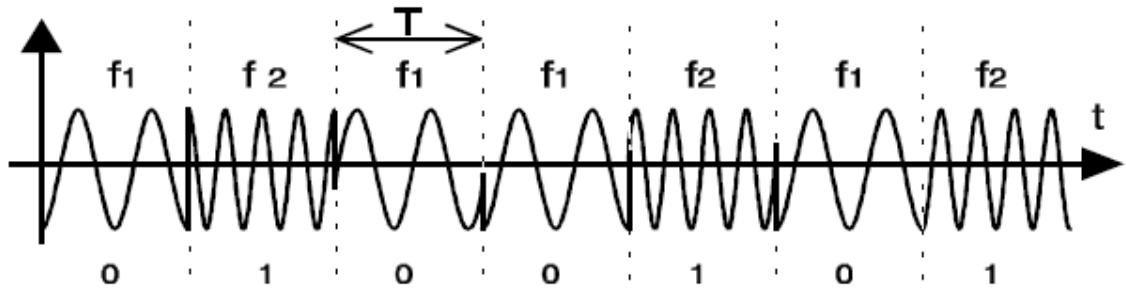


Figure 5.29- Chronogramme d'une modulation BFSK

Dans un intervalle de temps donné $[kT_b, (k+1)T_b]$, la fréquence instantanée est :

$$f(t) = f_p - \frac{\Delta f}{2} a_k$$

$$f_1 = f_p + \frac{\Delta f}{2}$$

$$f_2 = f_p - \frac{\Delta f}{2}$$

$$\text{La fréquence centrale est : } f_p = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$\text{L'excursion de fréquence est : } \Delta f_p = |f_2 - f_1|$$

$$\text{Le signal modulé est : } S_{BFSK}(t) = \cos\left(2\pi\left(f_p \pm \frac{\Delta f}{2}\right)t\right)$$

5.7.2 La modulation MDF à phase continue MDF-PC

Dans les Modulations par Déplacement de fréquence, on trouve les MDF avec continuité de phase pour lesquelles la phase varie de façon continue aux instants de transition kT_s .

Dans ce type de modulation, la phase varie de façon continue aux instants de transition kT_s .

Exemple : MDF binaire à phase continue

Le cas d'une MDF binaire à phase continue (MDF-2-PC) où a_k prend sa valeur dans l'alphabet $\{-1, 1\}$ en fonction de la donnée « 0 » ou « 1 » à transmettre, est présentée sur la figure 5.29 dans laquelle on remarque la continuité de phase.

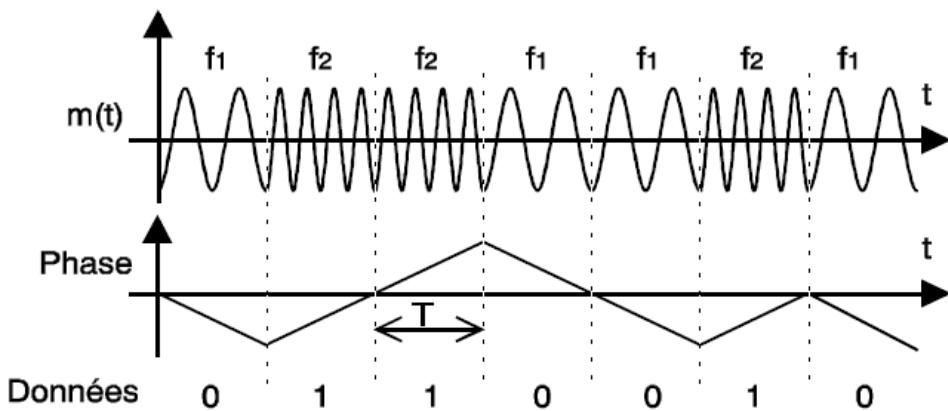


Figure 5.30- Modulation MDF2-PC

5.7.4 Conclusion

La MDF à phase discontinue est très simple dans sa réalisation. Mais, son principal défaut est la grande bande passante dont elle a besoin pour pouvoir transmettre les sauts de phase. Par contre, la MDF avec continuité de phase est plus complexe dans sa réalisation. Mais sa bande passante dont elle a besoin est très étroite.

La MDF à phase discontinue est fréquemment utilisée dans les systèmes de transmission de données sur voie téléphoniques (MODEM). Un cas particulier de la MDF à phase continue est la modulation GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying) qui a été choisie pour le système radio cellulaire européen appelé GSM (Groupe SpécialeMobile). Dans ce cas, $g(t)$ a l'allure d'une Gaussienne et les symboles a_k sont égaux à ± 1 .

Un autre exemple important de la modulation de fréquence à phase continue est la MSK (Minimum Shift Keying) caractérisé par un indice de modulation $m=0.5$.

Références bibliographiques

1. G. Baudouin, “Radiocommunicationsnumériques“,Dunod, 2002.
2. J.M. Brossier, “Signal et communication numérique:égalisation et synchronisation“, Hermes Science, 1997.
3. P. Comon,“Communications numériques - Cours et exercices a l'usage de l'eleveingenieur“, editionsl'Harmattan, 2010.
4. A. Glavieux, M. Joindot, “Communications Numériques“,Masson, 1996.
5. A. Glavieux, M. Joindot “Introduction aux communications numériques“, Collection : Sciences Sup, Dunod , 2007.
6. H. P. Hsu, “Communications analogiques et numériques : cours et problèmes“, McGraw-Hil, 1994.
7. G. Mahe, “Systemes de communications numeriques“, Elipses.
8. L.W. Couch,“Digital and Analog Communication Systems“, Prentice-Hal, New-Jersey, 2007.
9. S. Haykin,“Communication Systems“, John Wiley and Sons, Hoboken, New-Jersey, 2001.
10. J. Proakis, M. Salehi, “Communication SystemsEngineering “, 2nd edition, Prentice-Hal, New-Jersey, 2002.
11. Proakis, “Digital Communications “, Ed. Mac Graw Hil, 1995.
12. B.Sklar,“Digital Communications, Fundamentals and applications“, Prentice Hal, 2001.
13. B. P. Lathi,“Modern Digital and Analog Communication Systems“, Oxford University Press, 1998.
14. H. P. Hsu, “Analog and Digital Communications “, (Schaum's Outlines) 2nd Edition, McGraw Hil. 2003.
15. B. Sklar, “Digital Communications, Fundamentals and applications “, Prentice Hal, 2001.

