

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Ziane Achour de Djelfa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie électrique

جامعة زيان عاشور الجلفة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية



Polycopie de Cours

Traitement Avancé du Signal

Pour niveau 1^{ère} Année Master Électronique des Systèmes Embarqués

1^{ème} Semestre

Réaliser par :

Dr. MEHALLEL Elhadi

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier DIEU le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la force et la patience pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur BOUDJEHEM Djalil, Professeur à l'université de 8 Mai 145 Guelma et Monsieur AISSAOUI Djelloul, Maître de Conférences classe « A » à l'université de ZIANE ACHOUR Djelfa, d'avoir tous les deux pris le temps de lire ce modeste travail ainsi que pour leurs précieuses remarques.

Ce polycopié constitue un support de cours du module « **Traitement Avancé du signal** » destinés aux étudiants de la 1^{ère} année Master Electronique des systèmes embarqués et tous ceux qui veulent apprendre les méthodes d'analyse et de traitement des signaux les plus courantes. L'objectif de ce cours est permettant à l'étudiant de comprendre les principales techniques de traitement numérique de signal concernant les filtres numériques, ainsi que les différents concepts des signaux aléatoires et les processus stochastiques.

Le lecteur de ce document doit avoir des connaissances particulières préalables des concepts de fondamentaux de traitement du signal à savoir, la transformée de Fourier, la convolution et la corrélation, l'analyse et synthèse des filtres analogiques, l'échantillonnage des signaux et Transformées de Fourier Discrète (DFT) et rapide FFT.

Ce document a pour but de vous apporter une bonne compréhension de l'analyse et du traitement des signaux déterministes et aléatoires. Bien sûr, nous allons détailler les méthodes de filtrage numériques, rappeler les différentes notions des signaux aléatoires et les processus stochastiques, présenter les différents méthodes d'estimation spectrale que l'analyse temps- fréquence et temps-échelle des signaux.

Table des Matières

REMERCIEMENTS.....	II
AVANT - PROPOS	III
TABLE DES MATIERES	IV
LISTE DES FIGURES.....	VI
LISTE DES TABLEAUX	VII
CHAPITRE 1 RAPPELS SUR LES FILTRES NUMERIQUES (RIF ET RII).....	1
1.1. TRANSFORMATION EN Z.....	1
1.1.1. Définition	1
1.1.2. Région de convergence	2
1.1.3. Quelques propriétés de la transformation en Z	3
1.1.4. Transformée en Z inverse.....	4
1.1.5. Transformées en z usuelles	7
1.2. LES SYSTEMES DISCRETS	8
1.2.1. Définition	8
1.2.2. Schéma fonctionnel d'un système numérique.....	8
1.2.3. Classification des systèmes :	9
1.3. LES SYSTEMES DISCRETS LINEAIRES ET INVARIANTS (SLI).....	9
1.3.1. Propriétés des systèmes SLI.....	10
1.4. FILTRES NUMERIQUES	12
1.4.1. Définition	12
1.4.2. Spécification des filtres numériques	13
1.4.3. Classification des filtres numériques rationnels : RIF et RII	13
1.5. STRUCTURES DE REALISATION DES FILTRE NUMERIQUES	15
1.5.1. Structures de réalisation des filtres RIF	15
1.5.2. Structures de réalisation des filtres RII	16
1.6. FILTRE A MINIMUM DE PHASE.....	19
1.7. FILTRE NUMERIQUE A PHASE LINEAIRE	19
1.8. COMPARAISON : RIF ET RII	20
1.9. SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES	20
1.9.1. Spécification d'un filtre numérique	21
1.9.2. Méthodes de synthèse d'un filtre RIF	22
1.9.3. Méthodes de synthèse d'un filtre RII	29
1.10. LES SYSTEMES MULTI-CADENCES.....	34
1.10.1. Réduction de la fréquence d'échantillonnage.....	34
1.10.2. Augmentation de la fréquence d'échantillonnage	35
CHAPITRE 2 SIGNAUX ALEATOIRES ET PROCESSUS STOCHASTIQUES	49
2.1. INTRODUCTION	49
2.2. DEFINITION	49
2.3. SIGNAUX ALEATOIRES.....	50
2.4. VARIABLES ALEATOIRES.....	50
2.4.1. Moments d'une variable aléatoire.....	50
2.4.2. Vecteurs aléatoires	51
2.4.3. Lois de probabilité de VA usuelles	52
2.5. PROCESSUS ALEATOIRES (PA).....	52
2.5.1. Fonction de répartition et densité de probabilité.....	53
2.5.2. Moments temporels d'un processus aléatoire	53

2.5.3. Moments statistiques d'un processus aléatoire	53
2.5.4. Stationnarité et érgodicité	55
2.5.5. Propriétés de la fonction d'autocorrélation	56
2.5.6. Processus aléatoires à temps discret.....	56
2.5.7. La fonction d'autocorrélation en discret	56
2.6. PUISSANCE	57
2.7. DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE (RELATION DE WIENER-KINTCHINE).....	57
2.8. BRUIT BLANC	57
2.9. FILTRAGE LINEAIRE DES SIGNAUX ALEATOIRES	58
2.10. ESTIMATION DE LA DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE (DSP).....	59
2.10.1. Méthodes d'estimation spectrales classique	59
CHAPITRE 3 ANALYSE SPECTRALE PARAMETRIQUE ET FILTRAGE NUMERIQUE	
ADAPTATIF	69
3.1. INTRODUCTION	69
3.2. ESTIMATION SPECTRALE PARAMETRIQUE	69
3.2.1. Modèles autorégressif (AR)	69
3.2.2. Modèles à moyenne ajustée (MA) :	70
3.2.3. Modèles autorégressif à moyenne ajustée (ARMA)	71
3.3. RELATION ENTRE LES MODELES	73
3.4. RELATION ENTRE FAC ET PARAMETRES DU MODELE (YULE-WALKER).....	73
3.5. METHODES D'ESTIMATION SPECTRALE AUTOREGRESSIVE	75
3.5.1. Relation AR-Prédiction Linéaire.....	75
3.5.2. Algorithme de Levinson.....	76
3.5.3. Algorithme de Burg	77
3.6. FILTRAGE ADAPTATIF	77
3.6.1. Filtres de Wiener	77
3.6.2. Algorithmes pour le filtrage adaptatif	79
3.7. CONCLUSION.....	81
CHAPITRE 4 ANALYSE TEMPS-FREQUENCE ET TEMPS-ECHELLE	84
4.1. INTRODUCTION	84
4.2. ANALYSE TEMPS-FREQUENCE	84
4.2.1. Transformée de Fourier : inconvénients	84
4.2.2. Dualité temps- fréquence et Transformée de Fourier à court terme (STFT).....	85
4.2.3. Nécessité de l'analyse d'ondelettes.....	87
4.3. ONDELETES CONTINUES, DISCRETES ET ONDELETES DYADIQUES	88
4.3.1. Ondelettes continues	88
4.3.2. Ondelettes discrètes et Ondelettes dyadiques	89
4.4. ANALYSE MULTI-RESOLUTION ET BASES D'ONDELETES	90
4.4.1. Application de l'algorithme de de l'analyse multirésolution Stéphane sur un signal	92
4.4.2. Application de l'algorithme de l'analyse multirésolution sur une image	94
4.5. BASES D'ONDELETES ORTHOGONALES	97
4.5.1. Ondelettes orthogonales	97
4.5.2. Ondelettes biorthogonales.....	98
4.6. TRANSFORMEE DE WIGNER-VILLE.....	100
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	101

Liste des Figures

Figure 1. 1.	Séquence d'échantillons.	1
Figure 1. 2.	Séquence impulsion unité.	2
Figure 1. 3.	Séquence échelon.	2
Figure 1. 4.	Domaine de convergence, $X(z) = 1/(1 - az - 1)$	3
Figure 1. 5.	Illustration d'une couronne de convergence.....	3
Figure 1. 6.	Représentation d'un système discret.	8
Figure 1. 7.	Schémas fonctionnels (diagramme bloc) de base d'un système numérique.....	8
Figure 1. 8.	Schéma fonctionnel d'un système numérique.....	9
Figure 1. 9.	Réponse impulsionnelle d'un système SLI.....	10
Figure 1. 10.	Critère de stabilité d'un système numérique.	12
Figure 1. 11.	Réponses fréquentielles idéales des 4 filtres de base.	13
Figure 1. 13.	Structures directe d'un filtre RIF.....	16
Figure 1. 14.	Structures cascade d'un filtre RIF.....	16
Figure 1. 15.	Structure directe I de réalisation d'un filtre RII.	17
Figure 1. 16.	Structure directe II de réalisation d'un filtre RII ($M=N$).....	17
Figure 1. 17.	Formes directe II de réalisation d'un filtre RII ($M=N$).	18
Figure 1. 18.	Gabarit fréquentiel d'un filtre passe-bas.	21
Figure 1. 19.	Gabarit fréquentiel d'un filtre passe-bas.	22
Figure 1. 20.	Schéma fonctionnel de synthèse d'un filtre RIF par fenêtrage.	23
Figure 1. 21.	Illustration de l'effet du fenêtrage sur le filtre idéal.....	26
Figure 1. 22.	Réponse impulsionnelle et fréquentiel.	27
Figure 1. 23.	Conservation de la réponse impulsionnelle entre les filtres analogique et numérique.....	29
Figure 1. 24.	Transformation du plan p vers le plan z.....	32
Figure 1. 25.	Décimation d'un signal.	34
Figure 1. 26.	Représentation d'un signal continu $xc(t)$ et de son échantillonnage à 2 fréquences différentes et de leurs spectres respectifs.....	35
Figure 1. 27.	Décimateur : filtrage passe-bas suivi d'une décimation.....	35
Figure 1. 28.	Élévateur de fréquence d'un facteur L : ajout de $L-1$ zéros entre deux échantillons.....	36
Figure 1. 29.	Influence sur le spectre d'un signal interpolé par des zéros.....	36
Figure 1. 30.	Principe de l'interpolation d'un signal.....	37
Figure 1. 31.	Multiplication de la fréquence d'échantillonnage par un facteur rationnel $R = L/M$	37
Figure 2.1.	Processus aléatoire et signaux et variables aléatoires.	49
Figure 2.2.	Loi normale.	52
Figure 2.3.	Loi Uniforme.....	52
Figure 2.4.	DSP et corrélation d'un bruit blanc.....	58
Figure 3.1.	Filtre générateur de processus AR.	70
Figure 3.2.	Filtre générateur de processus MA.	71
Figure 3.3.	Filtre générateur de processus ARMA.	72
Figure 3.4.	filtrage linéaire.	78
Figure 3.5.	Schéma général d'un système de filtrage adaptatif.	79
Figure 4.1.	Représentation temporelle et fréquentiel d'un signal de piano : les notes sont jouées en même temps.	84
Figure 4.2.	Représentation temporelle et fréquentiel d'un signal de piano : les notes sont jouées l'une après l'autre.	85
Figure 4.3.	Boîte de Heisenberg représentant un atome temps-fréquence.	86
Figure 4.4.	Pavage temps-fréquence symbolisant différentes représentations d'un signal.....	87
Figure 4.5.	Génération d'ondelette par dilatation et translation.....	88

Figure 4.6.	Schéma de l'analyse Multirésolution.....	92
Figure 4.7.	Décomposition unidimensionnelle par ondelettes.	93
Figure 4.8.	Reconstruction unidimensionnelle par ondelettes.....	94
Figure 4.9.	Algorithme de décomposition de Mallat à deux dimensions.	95
Figure 4.10.	Algorithme de reconstruction exacte de Mallat	95
Figure 4.11.	Présentation d'une analyse multirésolution à 3 niveaux à l'aide de l'algorithme de Mallat .	96
Figure 4.12.	Analyse multirésolution appliquée à l'image de Lena à l'aide de l'algorithme de Mallat.....	96
Figure 4.13.	Ondelette de Haar : (a) l'ondelette. (b) la transformée de Fourier	97
Figure 4.14.	Exemple des ondelettes biorthogonales à support compact de Daubechies (a) Fonction d'ondelette. (b) Fonction d'échelle.	98
Figure 4.15.	Exemple des ondelettes biorthogonales de Spline	99

Liste des Tableaux

Tableau 1.1. Transformées en Z de fonctions usuelles.	7
Tableau 1.2. Caractéristiques des principales fenêtres.....	25

Chapitre 1

Rappels sur les Filtres Numériques (RIF et RII)

1.1. Transformation en Z

La transformée en Z, notée TZ est un outil précieux d'analyse et de traitement de signaux numériques. Cette transformée est l'équivalent dans le domaine discret de la transformée de Laplace pour le domaine continu. Elle permet de décrire facilement les signaux à temps discret et la réponse des systèmes linéaires invariants soumis à des entrées diverses. Ce type de transformée en Z permet de calculer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant décrit par une équation aux différences finies. Elle permet aussi de représenter les systèmes numériques linéaires et d'interpréter les caractéristiques des signaux et des filtres numériques dans le domaine des fréquences. La transformée de Fourier discrète est un cas particulier de la transformée en Z.

1.1.1. Définition

Pour arriver à la transformée en Z, la première étape est de discrétiser le signal $x(t)$ pour obtenir $x(n)$. C'est une façon commode de représenter graphiquement une séquence numérique $x(n)$ constituée des valeurs du signal $x(t)$ aux instants $t=0, T_e, 2T_e, \dots$. On supposera que le signal $x(t)$ est nul pour $t < 0$.

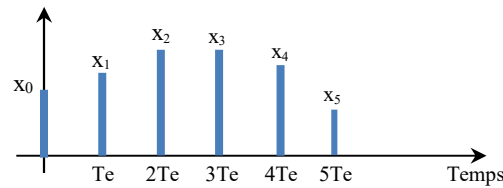


Figure 1. 1. Séquence d'échantillons.

On appelle transformée en Z de la séquence numérique $x(n)$, le polynôme $X(z)$ défini par :

$$X(z) = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} + x_3 \cdot z^{-3} + \dots$$

La transformée en Z directe bilatérale d'un signal à temps discret $x(n)$ est définie par :

$$X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (1.1)$$

Où $z = r \cdot e^{j\omega}$ est une variable complexe ($z \in \mathbb{C}$) définie partout où cette série converge. Les signaux discrets étant la plupart du temps causaux, on définit plutôt la transformée en Z (dite **unilatérale**) par :

$$X(z) = TZ[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (1.2)$$

En considérant l'expression de la Transformée de Fourier à temps discrète :

$$X(f) = TFTD[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \quad (1.3)$$

Pour $z = e^{j2\pi fT}$, la transformée en Z de la suite $x(n)$ coïncide avec sa transformée de Fourier :

$$X(z)|_{z=e^{j2\pi fT}} = X(f) \quad (1.4)$$

Exemple :**1- Séquence impulsion unité :** $x(n) = \delta(n)$

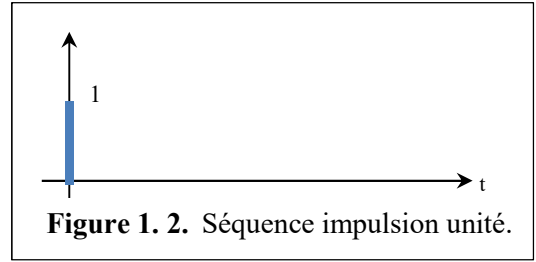
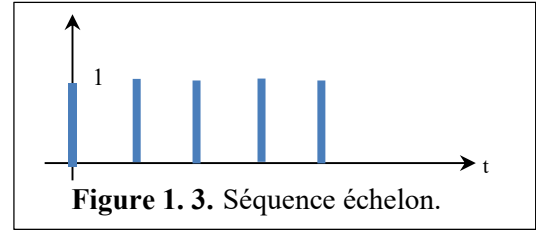
$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$X(z) = TZ\{\delta(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1z^{-n} = 1$$

2- Séquence échelon : $x(n) = u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = TZ\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

**Figure 1. 2.** Séquence impulsion unité.**Figure 1. 3.** Séquence échelon.

La somme est celle de la suite géométrique $(z^{-1})^n$ de raison z^{-1} qui est finie si $|z^{-1}| < 1$, dans ce cas, la somme est :

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{si } |z^{-1}| < 1$$

3- Exponentielle réelle : $x(n) = a^n u(n)$

$$X(z) = TZ\{a^n u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

La somme est celle de la suite géométrique $(az^{-1})^n$ de raison az^{-1} qui est finie si $|az^{-1}| < 1$, $\Rightarrow |z| > |a|$, dans ce cas, la somme est :

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad \text{si } |z| > |a|$$

4- Soit la séquence $x(n) = (1, 2, 3, 5, 0, 2)$ on peut écrire $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 5\delta(n-3) + 2\delta(n-5)$. Alors : $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^{-5}$

1.1.2. Région de convergence

La Région De Convergence (RDC) est importante à comprendre car elle définit la région où la transformée en Z existe. Le RDC pour un $x(n)$ donné est défini comme la plage de z pour laquelle la transformée en Z converge. Puisque la transformée en Z est une série de puissances, elle converge lorsque $x(n).z^{-n}$ est absolument sommable.

$$RDC = \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n).z^{-n}| < +\infty \right\} \quad (1.5)$$

Pour déterminer la région de convergence, on utilise le critère de Cauchy sur la convergence des séries de puissance. La série géométrique S :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n + \dots \quad (1.6)$$

Converge si la condition suffisante suivante est satisfaite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |U(n)|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad (1.7)$$

Dans le cas de TZ, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)z^{-n}|^{\frac{1}{n}} < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} |z^{-1}| < 1$$

Posons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = r \quad (1.8)$$

D'après la relation précédente :

$$|z^{-1}| < \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{z} < \frac{1}{r} \quad (1.9)$$

La série converge donc pour $|z| > r$.

La figure suivante représente le domaine de convergence dans le plan complexe pour la série $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ qui converge si et seulement si $|a z^{-1}| < 1$, c'est-à-dire ssi $|z| > |a|$.

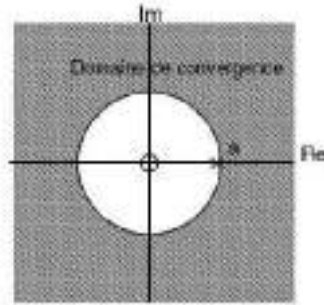


Figure 1. 4. Domaine de convergence, $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

D'une manière générale, la région de convergence est toujours une couronne, c'est à dire est définie par l'ensemble des points z tels que $r_1 < |z| < r_2$, où r_1 peut être nul et r_2 peut être ∞ .

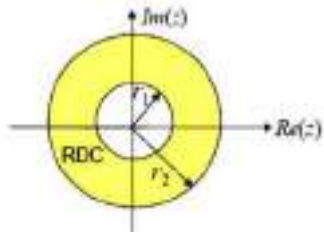


Figure 1. 5. Illustration d'une couronne de convergence.

Exemple :

1) $x(n) = \delta(n)$, $X(z) = z^0 = 1$, la région de convergence est \mathbb{C}

2) $x(n) = u(n)$: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$, Convergent pour $|z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > 1$.

La RDC est ici l'extérieur du disque unité,

3) $x(n) = a^n u(n)$: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$, avec un domaine de convergences $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$.

1.1.3. Quelques propriétés de la transformation en Z

La transformation en Z possède des propriétés similaires à celles de la transformation de Laplace. Les propriétés les plus utilisées sont rappelées ci-après sans démonstration.

1. **La linéarité** : Soient deux signaux à temps discret $x(n)$ et $y(n)$ ayant pour transformées en Z respectives $X(z)$ et $Y(z)$.

$$TZ \{a x[n] + b y[n]\} = aX(z) + b Y(z) \quad (1.10)$$

2. **Le retard** :

$$TZ \{x[n - k]\} = z^{-k} X(z) \quad (1.11)$$

3. Le théorème de l'avance :

$$TZ \{x[n+k]\} = z^k \left[TZ\{x(n)\} - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{-j} \right] \quad (1.12)$$

4. La multiplication par une séquence exponentielle :

$$TZ \{a^n x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (1.13)$$

5. L'inversion de temps

$$TZ \{x[-n]\} = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad (1.14)$$

6. La dérivation dans le domaine z

$$TZ \{n^k \cdot x[n]\} = (-1)^k - z^k \frac{d^k}{dz^k} X(z) \quad (1.15)$$

7. Convolution :

$$TZ\{x(n) * y(n)\} = X(z) \times Y(z) \quad (1.16)$$

8. Corrélation :

$$TZ\{x(n) \otimes y(n)\} = X(z) \times Y(z^{-1}) \quad (1.17)$$

9. Théorème de la valeur initiale : soit $x(n)$ signal causal

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (1.18)$$

10. Théorème de la valeur finale (si le système est stable) :

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z) \quad (1.19)$$

1.1.4. Transformée en Z inverse

La transformée en Z inverse permet de retrouver la séquence discrète $x(n)$ à partir de sa transformée directe en Z $X(z)$. A partir d'une liste de transformées en Z des signaux élémentaires connus, il peut être efficace de retrouver des signaux temporels. Cependant, lorsque la transformée ne peut facilement s'écrire comme la combinaison de transformées élémentaires, il reste les techniques générales de transformation inverse :

1. L'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus,
2. Le développement en puissance de z et de z^{-1} ,
3. Le développement en fractions élémentaires.

1.1.4.1. Transformée inverse par intégration et méthode des résidus

Pour trouver transformée inverse en Z par la méthode des résidus, on peut s'aider utilement du théorème de Cauchy qui établit que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz \quad (1.20)$$

Où Γ étant un contour fermé d'intégration renfermant l'origine.

L'intégrale précédente consiste à sommer $z^{n-1}X(z)$ pour des valeurs de z prises sur un contour fermé Γ du plan complexe qui contient l'origine du plan tout en étant inclus dans le domaine de convergence de la fonction. Le théorème des résidus est souvent utilisé pour déterminer $x(n)$:

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux Pôles } p_i \quad (1.21)$$

Avec $R(z) = z^{n-1}X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ sous forme fractionnelle.

On notera plutôt :

$$x(n) = \sum_{\forall p_i \in D_{CV}} \text{Res}(z^{n-1}X(z), p_i) \quad (1.22)$$

Le calcul des résidus dépend de la présence de pôles simples ou multiples sur $R(z)$, i.e. dépend de la présence de zéros simples ou doubles sur $D(z)$.

1. Pôles simples de $R(z)$: p_i tel que $D(z)|_{p_i} = 0$

c-à-d : $D(z) = (z - p_i)F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\text{Res}(R(z), p_i) = \left[(z - p_i) \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i}$$

2. Pôles multiples d'ordre m de $R(z)$: p_i tel que $D(z)|_{p_i} = 0$.

c-à-d : $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\text{Res}(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)} \right]_{z=p_i}$$

1.1.4.2. Transformée inverse par division polynômiale

Il est possible de calculer la transformée en Z inverse selon les puissances croissantes de z^{-k} ou selon les puissances décroissantes de z . S'il est possible d'écrire $X(z)$ comme une série de puissances de z^{-k} , l'unicité de la transformation directe conduit à prendre les coefficients de la série pour le signal temporel. Si

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{-n} \quad (1.23)$$

Par identification, alors,

$$x(n) = c_n \quad (1.24)$$

Exemple : On recherche par exemple la réponse impulsionnelle d'un système décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = y(n-3) + x(n)$$

On trouve aisément : $X(z) = \frac{1}{1-z^{-3}}$ $x(n)$ causale

En utilisant la limite des séries géométriques, on a :

$$\frac{1}{1-z^{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-3})^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-3k} = 1 + z^{-3} + z^{-6} + \dots$$

On obtient donc :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-3k)$$

Il s'agit ici d'un cas simple d'utilisation des séries géométriques (développement en série de Laurent).

1.1.4.3. Transformée inverse par décomposition en fractions rationnelles

L'idée générale de cette approche consiste à trouver pour une fonction $X(z)$ complexe un développement en fonctions en Z plus simples et pour lesquelles une transformée inverse est connue.

En appliquant le principe de linéarité de la transformée, il est aisé de recomposer le signal temporel inverse à partir des signaux temporels correspondant à chacune des transformées élémentaires. En supposant :

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \dots + \alpha_L X_L(z) \quad (1.25)$$

La transformée inverse en Z est obtenue par :

$$x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \dots + \alpha_L x_L(n) \quad (1.26)$$

La classe des transformées en Z rationnelles peut toujours s'écrire selon ce principe. On écrira alors :

$$X(z) = \alpha_1 \frac{z}{z - p_1} + \alpha_2 \frac{z}{z - p_2} + \dots \quad (1.27)$$

On aura alors la TZI:

$$x(n) = \alpha_1 p_1^n + \alpha_2 p_2^n + \dots \quad (1.28)$$

La fonction est sous forme polynomiale : $X(z) = \frac{D(z)}{D(z)}$

✎ Les **pôles** z_i tels que $D(z) = 0$. C'est l'équation caractéristique associée à $X(z)$.

✎ Les **zéros** z_k tels que $N(z) = 0$.

Supposons qu'on a une forme rationnelle en termes de z^{-1}

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^{-M} \prod_{j=1}^M (z - z_k)}{a_0 z^{-N} \prod_{i=1}^N (z - p_k)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.29)$$

- Si le degré de $N(z)$ est inférieure à celui de $D(z)$: $M < N$

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (1.30)$$

La transformée inverse sera :

$$x(n) = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) \quad (1.31)$$

La règle pour appliquer la décomposition en fraction simple :

- 1) Supprimer tous les exposants négatifs,
- 2) Déterminer $X(z)/z$,
- 3) Multiplier $X(z)/z$ par z ,
- 4) utiliser les règles de table de la transformée en z .

La décomposition en fraction simple se fait en respectant les différents cas figurants dans les règles suivantes :

a) Si tous les pôles sont **simples** : le calcul de A_k sous fait par :

$$\frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \dots + \frac{A_m}{z-p_m} \Rightarrow A_k = (z - p_k) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_k}$$

b) Si les pôles sont **multiples** : le calcul de A_k sous fait par :

$$\frac{A_m}{z-p} + \frac{A_{m-1}}{(z-p)^2} + \dots + \frac{A_1}{(z-p)^m} \Rightarrow A_k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - p_k)^m \frac{X(z)}{z} \right) \Big|_{z=p_k}$$

- Si le degré de $N(z)$ est supérieure ou égale à celui de $D(z)$: $M > N$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (1.32)$$

La transformée inverse sera :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k \delta(n - k) + \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u(n) \quad (1.33)$$

Exemple 1 : soit $X(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$

On multiplie par z^2 on trouve $X(z) = \frac{z^2}{z^2-3z+2} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$. La décomposition en éléments simples, on écrit $\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A_1}{(z-1)} + \frac{A_2}{(z-2)}$ avec $A_1 = \lim_{n \rightarrow 1} (z-1) \frac{X(z)}{z} = -1$ et $A_2 = \lim_{n \rightarrow 2} (z-2) \frac{X(z)}{z} = 2$

D'où : $\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{(z-1)} + \frac{2}{(z-2)} \Rightarrow X(z) = \frac{-z}{(z-1)} + \frac{2z}{(z-2)}$

Donc $x(n) = -u(n) + 2 \cdot (2)^n u(n) = ((2)^{n+1} - 1)u(n)$

Exemple 2 : soit $X(z) = \frac{2z^2-8z+5}{(z-2)(z-1)}$

La décomposition de $X(z)$ en éléments simples donne : $X(z) = 2 - \frac{3}{(z-2)} + \frac{1}{(z-1)}$ qu'on peut écrire :

$X(z) = 2 - \frac{3z^{-1}}{(1-2z^{-1})} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}$, d'où par l'application « inverse » du théorème de retard (et la transformée usuelles) on trouve : $x(n) = 2 \cdot \delta(n) - 3 \cdot 2^{n-1}u(n-1) + u(n-1)$

1.1.5. Transformées en z usuelles

Les transformées en z de quelques fonctions les plus utilisées en traitement du signal sont présentées dans la Table 1.1. Quelques transformations usuelles peuvent être utilisées.

	Signal $x[n]$	Transformée en Z $X(z)$	Domaine de convergence
1	$\delta[n]$	1	\mathbb{C}
2	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3	$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
4	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
5	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
6	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
8	$\cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$ z > 1$
9	$\sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$ z > 1$
10	$a^n \cos(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$ z > a $
11	$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$ z > a $

Tableau 1.1. Transformées en Z de fonctions usuelles.

1.2. Les systèmes discrets

1.2.1. Définition

Un système à temps discret est un système qui transforme un signal d'entrée à temps discret, appelé *signal d'excitation*, en un signal de sortie à temps discret, appelé *signal de réponse*. Un signal d'entrée $x[n]$ est transformé en un signal de sortie $y[n]$ et on note :

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{H}} y[n] \quad \text{ou} \quad y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$$

Notation : $x[n]$ ou $x(n)$

\mathcal{H} symbolise la transformation (opérateur) effectuée par le système discret.



Figure 1. 6. Représentation d'un système discret.

Ce sont des systèmes ou opérateurs qui transforment des signaux discrets en signaux discrets. La réponse d'un système $y(n)$ à une excitation $x(n)$ est définie par l'équation aux différences linéaires à coefficients constants suivant :

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

1.2.2. Schéma fonctionnel d'un système numérique

Un système numérique peut être décrit, comme on l'a vu, par la donnée d'une équation liant le signal de sortie au signal d'entrée. On peut également, et c'est fréquemment le cas, représenter ces systèmes à l'aide de diagrammes fonctionnels.

Ceux-ci illustrent alors graphiquement les opérations effectuées sur le signal d'entrée ainsi que les connexions les reliant. Les plus fréquentes sont l'addition de 2 signaux (\oplus), la multiplication de 2 signaux entre eux (\otimes), la multiplication d'un signal par un coefficient (\rightarrow), le décalage avant (z) et le décalage arrière (z^{-1}).

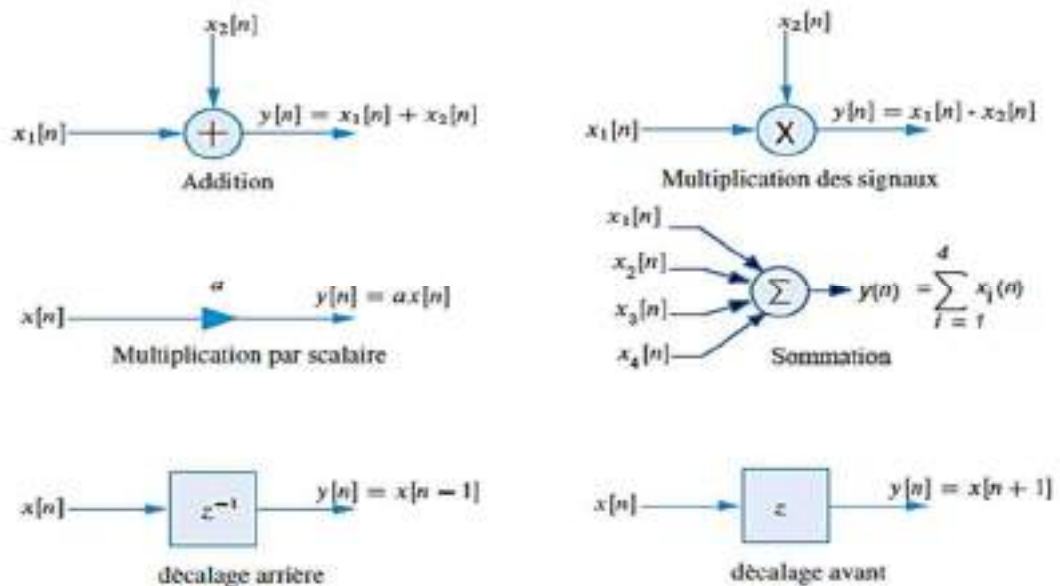


Figure 1. 7. Schémas fonctionnels (diagramme bloc) de base d'un système numérique.

Le schéma fonctionnel correspondant à l'équation non linéaire suivante :

$$y(n) = 0.5 (x_1[n] + x_1[n-1]) \cdot x_2[n] + 0.3 y[n-1]$$

est :

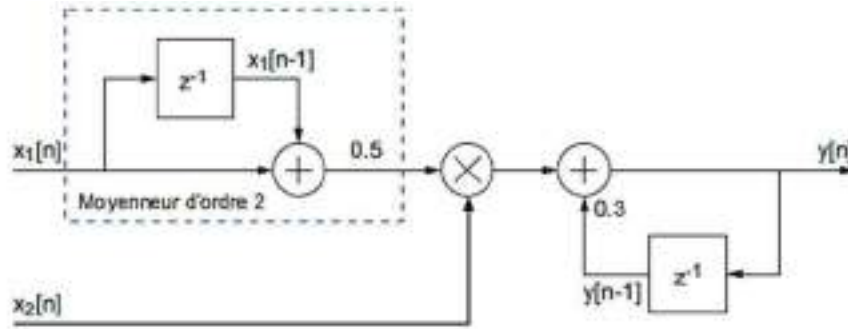


Figure 1. 8. Schéma fonctionnel d'un système numérique

1.2.3. Classification des systèmes :

- ✓ Un système est *linéaire*, si 'il satisfait au principe de superposition :

$$a_1 x_1[n] \xrightarrow{\mathcal{H}} a_1 y_1[n] \quad (\text{homogénéité})$$

$$x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{\mathcal{H}} y_1[n] + y_2[n] \quad (\text{additivité})$$

$$\mathcal{H}\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 \mathcal{H}\{x_1[n]\} + a_2 \mathcal{H}\{x_2[n]\} \quad \forall x_1[n], x_2[n], a_1, a_2 \quad (1.34)$$

Exemple 1 :

$$\left. \begin{aligned} y[n] &= y[n-1] + x[n] \\ y[n] &= nx[n] \\ y[n] &= x[n^2] \end{aligned} \right\} \text{ sont linéaires.}$$

$$y[n] = x^2[n] \quad \text{est non linéaire.}$$

- ✓ Un système est *causal* si la réponse $y(n)$ du système à l'instant $n = k_0$ ne dépend que des entrées $x(n)$ aux instants actuelles ou passés $n \leq k_0$
- ✓ Un système *invariant dans le temps* est un système pour lequel un décalage temporel sur le signal d'entrée conduit à un signal de sortie simplement décalé de la même valeur :

$$\text{Si } \mathcal{H}\{x(n)\} = y(n)$$

$$\text{Alors } \mathcal{H}\{x(n-k)\} = y(n-k) \quad \forall n, k \in \mathbb{Z} \quad (1.35)$$

Exemple 2 :

Le système $y[n] = x[n] - x[n-1]$ est *invariant* dans le temps, tandis que les deux systèmes $y[n] = x[-n]$ et $y[n] = nx[n]$ sont *variants* dans le temps.

1.3. Les Systèmes discrets linéaires et invariants (SLI)

Soit un système discret linéaire et invariant (SLI) transformant un signal d'entrée $x[n]$ en un signal de sortie $y[n]$ tel que :

$$y[n] \rightarrow \mathcal{H}\{x[n]\} \quad (1.36)$$

La réponse impulsionnelle d'un système discret, noté $h(n)$ est sa réponse à une excitation du type impulsion de dirac $\delta(n)$. En effet, nous avons :

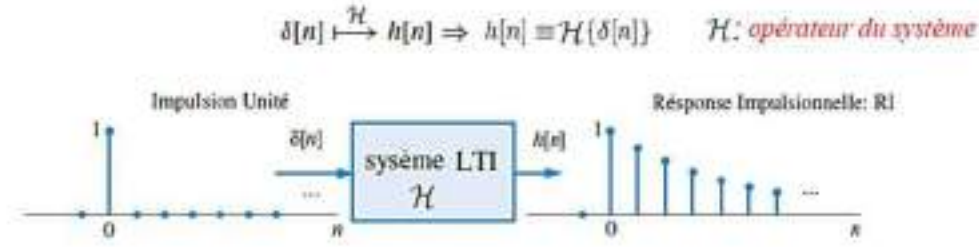


Figure 1. 9. Réponse impulsionnelle d'un système SLI.

Tout signal numérique quelconque $x(n)$ peut être considéré comme une suite d'impulsions d'amplitude variable :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n - k] \quad (1.37)$$

Puisque les systèmes que nous examinerons dès à présent sont linéaires et invariants dans le temps, la réponse de ceux-ci au signal $x[n]$ sera constituée d'une somme de réponses dues à chaque impulsion $x[k] \cdot \delta[n - k]$ et on a :

$\delta[n] \xrightarrow{\mathcal{H}} h[n] \Rightarrow \delta[n - k] \xrightarrow{\mathcal{H}} h[n - k] \quad \text{Invariance temporelle}$

$$y[n] = H\{x[n]\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot \delta[n - k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot H\{\delta[n - k]\} \quad \text{linéaire}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k] \quad (1.38)$$

Cette relation important porte le nom de produit de convolution numérique et on a :

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1.39)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \cdot x[n - k] \quad (1.40)$$

1.3. 1. Propriétés des systèmes SLI

1.3.1.1. Equation aux différences finie

Les systèmes linéaires invariants discret (SLI) décrits par une équation aux différences finies qui reliant la sortie $y(n)$ et l'entrée $x(n)$. Ces systèmes possèdent une transformée en Z rationnelle c'est ainsi que celles-ci vont s'écrire comme le rapport de deux polynômes en z^{-1} .

Mathématiquement, l'excitation et la réponse d'un système linéaire invariant satisfont l'équation aux différences linéaires à coefficients constants suivant :

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n - i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n - j) \quad (1.41)$$

Où a_i et b_j représentent les coefficients du système linéaire invariant.

$$y(n) = \sum_{j=0}^M \frac{b_j}{a_0} x(n - j) - \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{a_0} y(n - i) \quad (1.42)$$

En normalisant $a_0 = 1$, on obtient l'équation aux différences finies du système SLI :

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j x(n - j) - \sum_{i=1}^N a_i y(n - i) \quad (1.43)$$

1.3.1.2. Fonction de transfert

En appliquant la transformée en Z aux membres de l'équation aux différences finie, on utilise la règle de passage très simple :

$$x(n-j) \rightarrow X(z) z^{-j} \quad \text{et} \quad y(n-i) \rightarrow Y(z) z^{-i} \quad \text{avec} \quad z^{-1} \text{ opérateur de retard}$$

En utilisant cette règle, l'équation aux différences du système devient :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}\right) Y(z) = \left(\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}\right) x(z) \quad (1.44)$$

Ce qui donne la fonction de transfert $H(z)$ du système en z du filtre :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.45)$$

La fonction de transfert du système $H(z)$ est une fraction rationnelle. Les a_i et les b_j sont les coefficients du système. Certains coefficients du système peuvent être nuls. Pour faire apparaître la réponse en fréquence, il suffit de remplacer dans $H(z)$, la variable Z par $e^{j2\pi f}$.

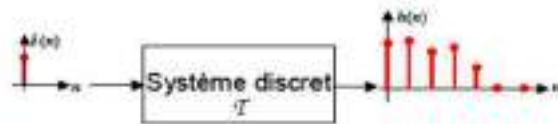
En mettant en évidence les racines des deux polynômes, on peut exprimer $H(z)$ par :

$$H(z) = b_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^M (z - z_j)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^M (1 - z_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (1.46)$$

Les z_j et p_i sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert $H(z)$.

1.3.1.3. Réponse d'un système

La réponse impulsionnelle d'un système discret est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac. La réponse $y(n)$ d'un système discret linéaire invariant ayant une réponse impulsionnelle $h(n)$ soumis à une entrée $x(n)$ est donnée par la convolution $y(n) = x(n) * h(n)$. La convolution se transforme à une multiplication dans le domaine z. On a donc :



$$Y(z) = X(z) \times H(z) \quad \text{où} \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

La réponse impulsionnelle $h(n)$ est la fonction en Z inverse de $H(z)$:

$$h(n) = h(0) + h(1) \cdot z^{-1} + h(2) \cdot z^{-2} + \dots + h(k) \cdot z^{-k} + \dots \quad (1.47)$$

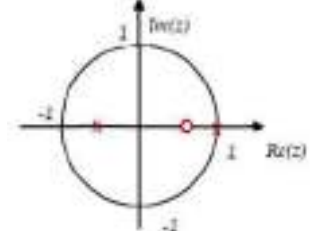
1.3.1.4. Diagramme des pôles et zéros

Comme la transformée de Laplace, on peut faire un diagramme de pôles et zéros avec la transformée en z. On utilise un « x » pour les pôles, et « o » pour les zéros.

Exemple : soit la fonction de transfert suivant, tracer diagramme des pôles et zéros

$$H(z) = \frac{3z-2}{(z-1)(z+0.5)};$$

Un zéro en $2/3$ et deux pôles $p_1=-0.5$ et $p_2=1$



1.3.1.5. Stabilité et causalité :

Avec la contrainte de $h(n)$

➤ **Causalité :** Un système linéaire discret invariant est *causal* si et seulement si sa réponse impulsionnelle $h(n)$ est causale; $\Rightarrow h(n) = 0, \forall n < 0$,

➤ **Stabilité :**

Un système linéaire discret invariant est *stable* si la réponse impulsionnelle est absolument sommable, c'est-à-dire

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.48)$$

Pour $H(z)$, les contraintes sont : Un système discret *linéaire et causal* est *stable* si tous les pôles P_i de la fonction de transfert $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire $|P_i| < 1$.

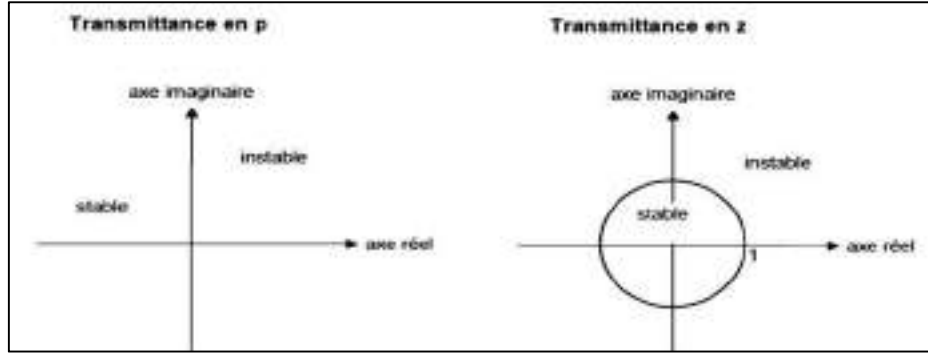
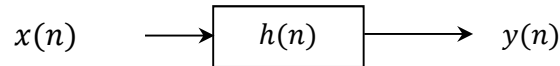


Figure 1.10. Critère de stabilité d'un système numérique.

1.4. Filtres numériques

1.4.1. Définition

Un filtre numérique est un système linéaire et invariant (SLI) utilisé pour modifier la représentation temporelle et fréquentielle d'un signal numérique d'entrée en le transformant en un signal numérique désiré en sortie. Il réalise une opération de convolution entre le signal d'entrée $x(n)$ et la réponse impulsionnelle du filtre $h(n)$ comme le montre la figure suivante :



Avec :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).x(n-k) \quad (1.49)$$

La transformée en z du signal de sortie sera :

$$Y(z) = H(z).X(z) \quad (1.50)$$

Où $H(z)$ est appelée **la fonction de transfert** du filtre numérique.

Nous avons vu qu'un système pouvait être décrit par une équation aux différences linéaires à coefficients constants suivant :

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad \text{En normalisant } a_0 = 1 \quad (1.51)$$

Utilisant la propriété de linéarité, la transformée en Z de l'équation aux différences se calcule aisément et donne :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}\right) Y(z) = \left(\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}\right) x(z) \quad (1.52)$$

La fonction de transfert $H(z)$ du système est :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \dots + b_M \cdot z^{-M}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_N \cdot z^{-N}} \quad (1.53)$$

L'équation de la fonction de transfert $H(z)$ peut également être représentée comme suit :

$$H(z) = b_0 \frac{z^{-M} \prod_{j=1}^M (z - z_j)}{z^{-N} \prod_{i=1}^N (z - p_i)} = b_0 \frac{\prod_{j=1}^M (1 - z_j z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i z^{-1})} \quad (1.54)$$

Les z_j et p_i sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert $H(z)$.

Un filtre **causal est stable** si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

1.4.2. Spécification des filtres numériques

Un filtre doit laisser passer certaines fréquences, alors qu'il doit en atténuer (voire éliminer) d'autres. Nous devons donc pouvoir représenter ces contraintes. Il y a quatre filtres de bases :

1. Les **filtres passe-bas** laissent passer les fréquences inférieures à une fréquence de coupure f_c et bloquent celles qui lui sont supérieures ;
2. Les **filtres passe-haut** bloquent les fréquences inférieures à une fréquence de coupure f_c et laissent passer celles qui lui sont supérieures ;
3. Les **filtres passe-bande** laissent passer les fréquences autour d'une fréquence centrale f_0 (ou comprises entre f_1 et f_2) et bloquent les autres ;
4. Les **filtres réjecteur-de-bande** bloquent les fréquences autour d'une fréquence centrale f_0 (ou comprises entre f_1 et f_2) et laissent passer les autres ;

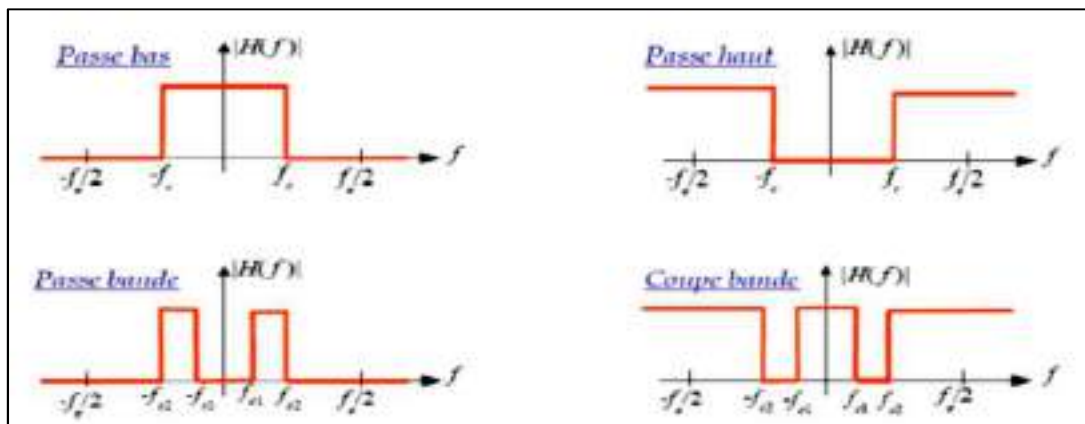


Figure 1. 11. Réponses fréquentielles idéales des 4 filtres de base.

Ce sont tous des systèmes linéaires, discrets, invariants dans le temps et unidimensionnels. De plus, pour qu'ils soient physiquement réalisables, il faut qu'ils soient nécessairement causaux.

1.4.3. Classification des filtres numériques rationnels : RIF et RII

Les filtres numériques peuvent être classés selon plusieurs critères :

1. La longueur de la réponse impulsionnelle implique deux types de filtres RII et RIF.
2. Le type de représentation, ou de structure, implique deux types de filtres récurrents et non récurrents.

Nous verrons qu'à l'exception d'un cas particulier, les filtres récurrents et non récurrents sont respectivement équivalents aux filtres RII et RIF.

1.4.4.1. Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Dans ces filtres, la sortie $y(n)$ ne dépend que des entrées $x(n)$, $x(n-1)$, ... et pas des sorties. Leurs réponse impulsionnelle à support fini pour $n < 0$ et $n > M$. Ces filtres sont encore appelés filtres *non récurrents* ou MA (*Moving Average*). Ils n'ont pas d'équivalent analogique.

Un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF) est un système linéaire discret invariant dans le temps régi par une équation aux différences pour lequel l'échantillon de sortie $y(n)$ ne dépend que d'un nombre limité d'échantillons d'entrée $x(n)$. Son équation aux différences est définie par :

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j \cdot x(n-j) \quad (1.55)$$

Et la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = \sum_{j=0}^M b_j \cdot z^{-j} \Rightarrow H(z) = \sum_{n=0}^M h(n) \cdot z^{-n} \quad (1.56)$$

On remarque que les coefficients b_j du filtre sont les valeurs de la réponse impulsionnelle $h(n)$, qui se trouve donc être limitée dans le temps.

$$h(n) = \sum_{j=0}^M b_j \cdot \delta(n-j) \quad (1.57)$$

Où b_j sont les coefficients du filtre ($b_j = h(n)$) et M est longueur du filtre.

Les filtres RIF sont toujours stables car ils n'admettent pas de pôles.

La réponse fréquentielle est s'obtient sans difficulté en remplaçant la variable z par $e^{j\Omega}$ soit : $z = e^{j\Omega}$

On a : $\Omega = \omega T_e = 2\pi f T_e = 2\pi \frac{f}{f_e}$, alors :

$$H(e^{j\Omega}) = H(f) = \sum_{k=0}^M h(k) \cdot e^{-j2\pi k \frac{f}{f_e}} \quad (1.58)$$

$H(e^{j\Omega})$ est appelé la réponse fréquentielle du filtre caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(k)$. Il s'agit d'un terme complexe qui peut s'exprimer par une partie réelle ou imaginaire ; on adopte le plus souvent une représentation de type polaire où l'on fait référence au module et à la phase de cette réponse fréquentielle :

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| e^{j \arg[H(e^{j\Omega})]} \quad (1.59)$$

La variable $\Omega = 2\pi f / f_e$ est la pulsation normalisée définie entre $+\pi$ et $-\pi$; elle représente les fréquences comprises entre $+f_e/2$ et $-f_e/2$.

Exemple 1 : Un filtre FIR est entièrement déterminé si l'on connaît l'ensemble des coefficients $h(n)$. Par exemple si :

$$h(n) = \{3, -1, 2, 1\}$$

Alors on peut écrire :

$$y(n) = \sum_{j=0}^3 h(n) \cdot x(n-j) = 3x(n) - x(n-1) + 2x(n-2) + x(n-3)$$

Remarque : Un filtre numérique linéaire et causal est stable si et seulement si tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité (leur module doit être strictement inférieur à 1).

1.4.4.2. Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

Dans ces filtres, la sortie $y(n)$ dépend des entrées $x(n), x(n-1), \dots$ et des sorties précédentes $y(n-1), \dots$. Leurs réponses impulsionnelles à support infini i.e. $h(n) \neq 0, \forall n$. Ces filtres sont encore appelés *filtres récurrents* ou AR (*Auto Regressive*).

L'équation aux différences de ces filtres est définie par l'équation suivante :

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j \cdot x(n-j) - \sum_{i=1}^N a_i \cdot y(n-i) \quad (1.60)$$

On remarque que ces filtres ont une réponse impulsionnelle infiniment longue et qu'ils sont décrits par leurs fonction de transfert $H(z)$:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_M \cdot z^{-M}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_N \cdot z^{-N}} \quad (1.61)$$

On observe ainsi que le dénominateur de cette équation de transfert représente une Réponse Impulsionnelle Infinie RII ou IIR (*Infinite Impulse Reponse*) ou *Auto Regressive* (AR) et que son numérateur décrit une moyenne glissante (*Moving Average MA*). D'où l'appellation ARMA (*Auto Regressive and Moving Average*). On peut écrire la fonction de transfert comme suit :

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j \cdot z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{-i}} \quad (1.62)$$

La condition de stabilité est que les pôles à l'intérieure d'un cercle unité $|p_i| = 0$; les pôles sont les racines de dénominateur de $H(z)$, c'est-à-dire : $1 + \sum_{i=1}^N a_i \cdot z^{-i} = 0$

1.5. Structures de réalisation des filtres numériques

Un filtrage numérique ne pourra être réalisé en temps réel que s'il est réalisé dans le domaine temporel, en implantant l'équation aux différences. Cette dernière s'appuie sur 3 opérations élémentaires : le retard, la multiplication et l'addition.

Après avoir déterminé la fonction de transfert du filtre numérique, une variété considérable de structures programmables de réalisation se présente. Le choix d'une structure doit être rigoureux.

1.5.1. Structures de réalisation des filtres RIF

L'équation aux différences d'un tel filtre est donnée par :

$$y(n) = \sum_{j=0}^N b_j \cdot x(n-j) \quad (1.63)$$

La fonction de transfert est donnée par :

$$H(z) = \sum_{j=0}^N b_j \cdot z^{-j} = \sum_{j=0}^N h(n) \cdot z^{-n} \quad (1.64)$$

On a deux structure de réalisation des filtres RIF : la structure directe (ou transverse) et la transposé.

1) Structures directes : On peut en déduire immédiatement la structure directe d'un filtre RIF qui est représentée à la figure (a) sous sa forme normale. La forme transposée (figure(b)) est obtenue après manipulation de l'EDF.

On a deux structure de réalisation des filtres RIF : la structure directe (ou transverse) et la transposé.

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = N(z) \times \frac{1}{D(z)} = \underbrace{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}_{H_1(z)} \times \underbrace{\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}}_{H_2(z)} \quad (1.68)$$

✚ **Forme directe I** : partie non récursive, suivie de la partie récursive

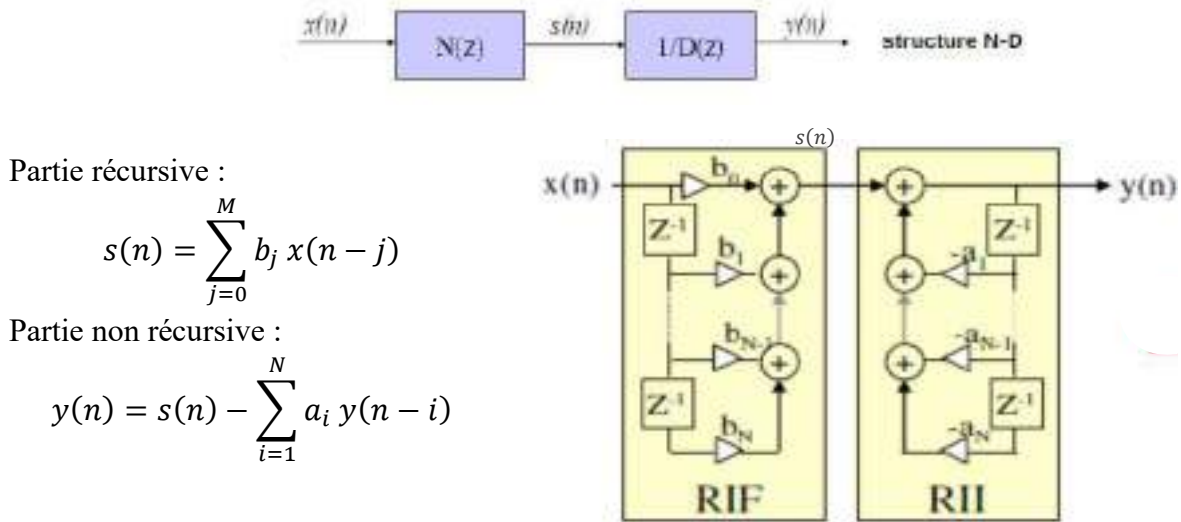


Figure 1. 15. Structure directe I de réalisation d'un filtre RII.

✚ **Forme directe II** : partie récursive, suivie de la partie non récursive.

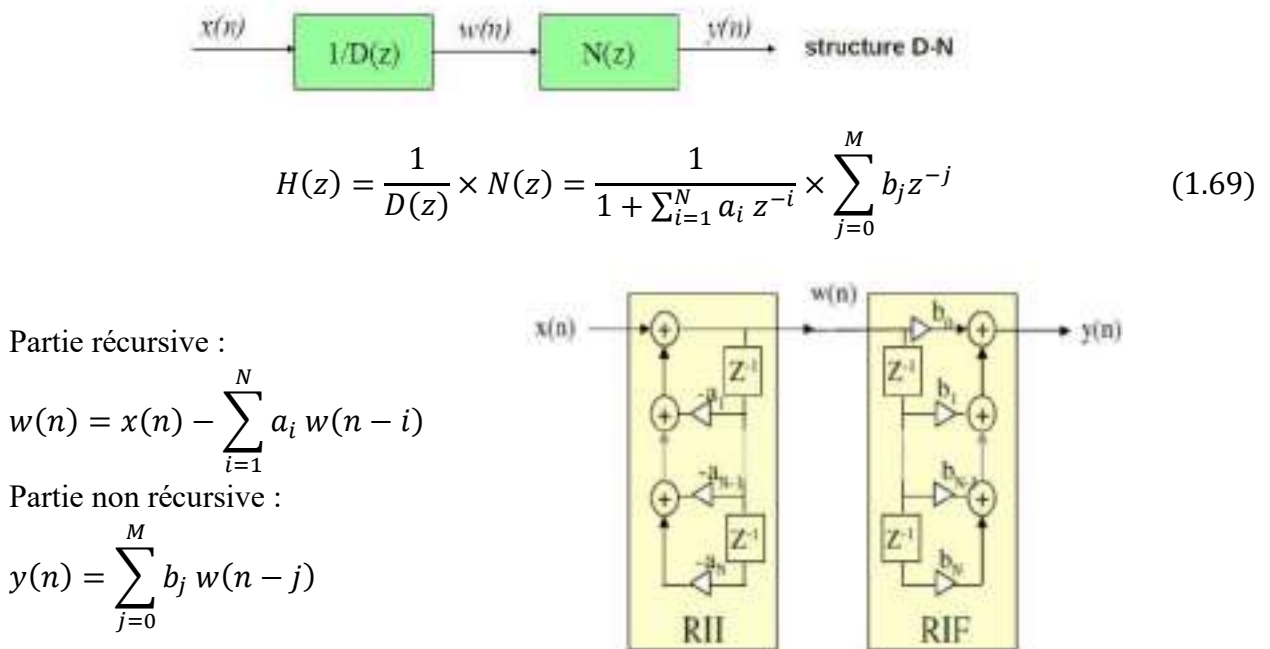
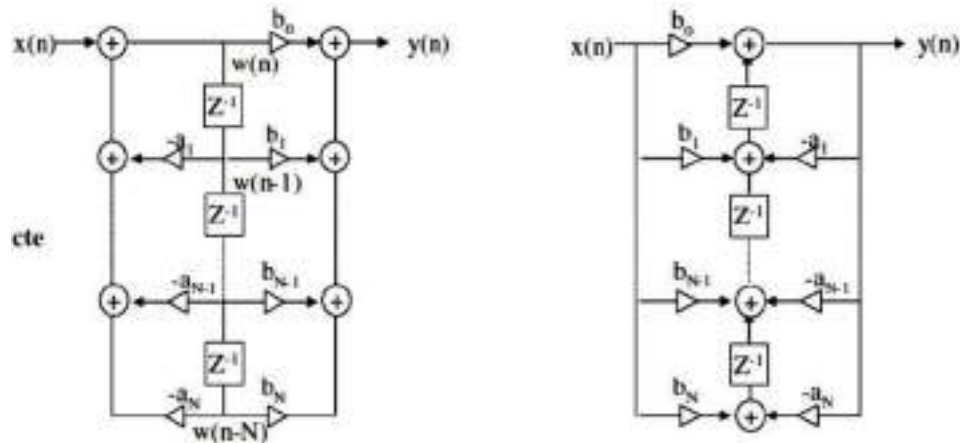


Figure 1. 16. Structure directe II de réalisation d'un filtre RII (M=N).

Remarque :

Cette structure directe II est la forme normale et elle est aussi appelée la forme *directe canonique* car elle utilise un nombre minimal de cases mémoires. Des formes transposées des structures directes, peuvent être obtenues en manipulant les EDFs. Un exemple de la forme transposée directe II est représenté ci-contre :



a) Forme directe II normale

b) Forme directe II transposée

Figure 1. 17. Formes directe II de réalisation d'un filtre RII ($M=N$).

Exemple : soit un filtre RII d'ordre 2 :

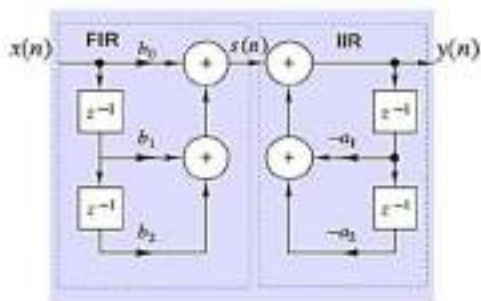
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

1^{re} possibilité : structure N-D

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{D(z)} \cdot \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1}$$

2^e possibilité : structure D-N

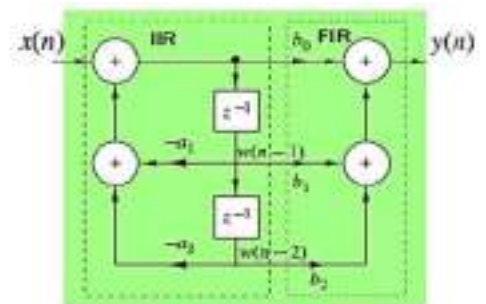
$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = \frac{1}{D(z)} \cdot N(z)$$



Forme directe normale I

$$s(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

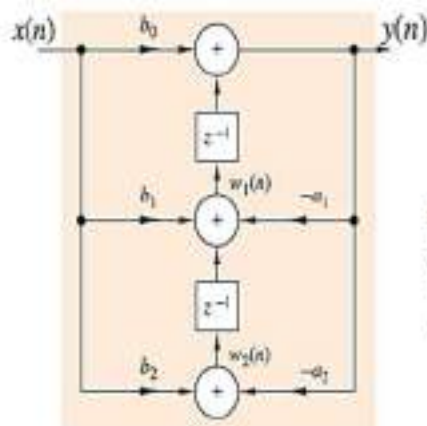
$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + s(n)$$



Forme directe normale II

$$w(n) = -a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2) + x(n)$$

$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2)$$



Forme directe II transposée

$$y(n) = b_0 x(n) + w_1(n-1)$$

$$w_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + w_2(n-1)$$

$$w_2(n) = b_2 x(n) - a_2 y(n)$$

2) **Structure cascade** : La réalisation en cascade permet d'écrire $H(z)$ sous la forme :

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \dots H_K(z) \quad (1.70)$$

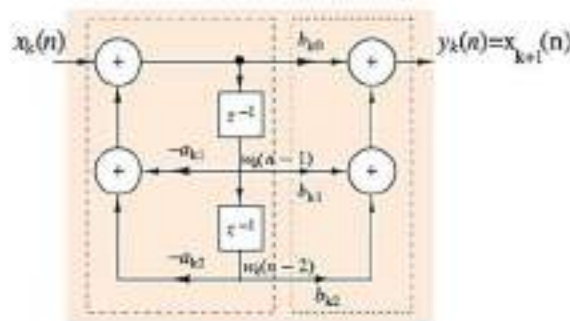
Où $H_k(z)$ sont choisis comme étant des fonctions de transfert du premier ordre

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1}} \quad \text{ou du second ordre} \quad H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}$$

La forme générale de la cascade structure est :



Si on utilise la forme directe II pour chaque sous-système on aura la réalisation suivante :



Avec

$$y_0(n) = x(n)$$

$$w_k(n) = -a_{k1}w_k(n-1) - a_{k2}w_k(n-2) + y_{k-1}(n), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$y_k(n) = b_{k0}w_k(n) + b_{k1}w_k(n-1) + b_{k2}w_k(n-2), \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$y(n) = y_K(n)$$

1.6. Filtre à minimum de phase

On dit qu'un filtre linéaire, dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle, est à minimum de phase, si tous les zéros de sa fonction de transfert sont à l'intérieur du cercle unité. Notons que, tel que nous l'avons défini, un filtre à minimum de phase est stable, causal et que le filtre inverse est lui-même causal et stable.

1.7. Filtre numérique à phase linéaire

Un filtre est dit à phase linéaire si courbe représentative de la phase de la réponse fréquentielle en fonction de la fréquence est constituée d'une succession de droite de mêmes pentes.

Un filtre est caractérisé par le module et la phase de sa réponse fréquentielle $H(f)$:

$$H(f) = R(f)e^{-j\phi(f)} \quad (1.71)$$

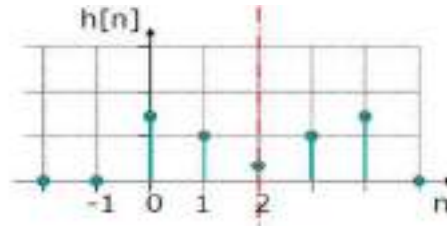
On définit le temps de propagation de groupe (ou retard) $\tau(f)$ par :

$$\tau(f) = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} \quad (1.72)$$

Le filtre est à phase linéaire si $\tau(f)$ est constant. Dans ce cas :

$$\phi(f) = \phi_0 - j2\pi f\tau \quad (1.73)$$

Dans ce cas, toutes les composantes du signal d'entrées subissent le même retard. On montre qu'un filtre FIR est à phase linéaire si ses coefficients sont symétriques $h(n) = h(N-1-n)$



Exemple :

Soit le filtre défini par la relation entrée-sortie suivante : $y(n) = \frac{1}{4}(x(n) + 2x(n-1) + x(n-2))$

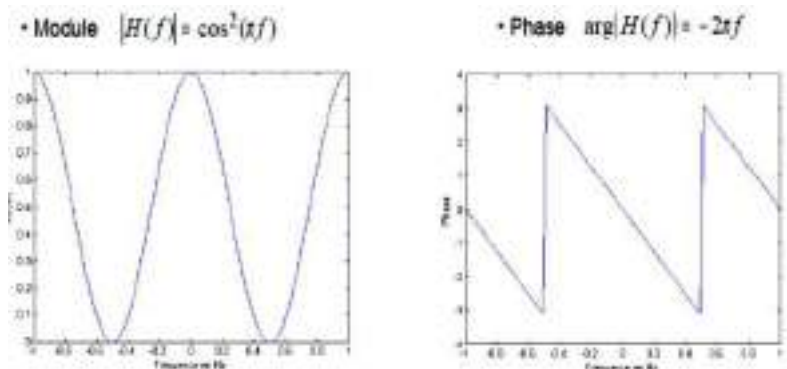
La réponse impulsionnelle est :

$$h(n) = \frac{1}{4}(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2))$$

La réponse impulsionnelle est :

$$H(f) = e^{-j2\pi f} \cos^2(\pi f)$$

On remarque que la phase est linéaire par rapport à f .



1.8. Comparaison : RIF et RII

FIR (non récursif)	<ul style="list-style-type: none"> - toujours stables car pas de pôles - phase linéaire \Rightarrow pas de distorsion - augmenter le nb. d'échantillons pour améliorer la performance - beaucoup de calculs / à un IIR à performances identiques
IIR (récursif)	<ul style="list-style-type: none"> - présente des pôles \Rightarrow peut-être instable ? - phase pas nécessairement linéaire \Rightarrow distorsion de phase - obtenu par transposition du filtre analogique ; - faible nombre de coefficients \Rightarrow moins de calculs qu'avec un FIR à performances identiques

1.9. Synthèse des filtres numériques

La synthèse ou la conception d'un filtre numérique consiste à la recherche des coefficients d'une fonction de transfert $H(z)$ ou d'une équation aux différences de manière à ce que la réponse harmonique du filtre satisfasse au cahier des charges fixé au préalable. Cette synthèse peut être basée sur les connaissances que l'on a de la réponse des filtres analogiques ou sur des méthodes spécifiques aux filtres numériques. Le processus de synthèse comporte les étapes suivantes :

1. Spécification des propriétés souhaitées du filtre (contraintes sur l'amplitude et/ou la Phase de la réponse en fréquence, des contraintes sur la réponse impulsionnelle, Spécification du type du filtre RII ou RIF et ordre du filtre).
2. Choix d'une structure d'implantation et démarche de réalisation en fonction de la technologie et le matériel à utiliser pour la mise en œuvre.

1.9.1. Spécification d'un filtre numérique

Avant qu'un filtre numérique soit conçu et implanté, nous avons besoin d'abord de définir ses spécifications. Ces dernières, sont habituellement réalisées à partir d'un gabarit fréquentiel, défini entre 0, et π et caractérisé par :

- La ou les fréquences de coupures (avec tolérances),
- Le gain dans la bande passante (avec tolérances),
- Le gain dans la bande atténuée (avec tolérances).

A titre d'exemple, pour un filtre passe-bas, le gabarit est représenté dans la figure 1. Des diagrammes similaires existent pour les autres types de filtres.

Un filtre passe-bas possède trois zones différentes : la **bande passante** ($0 \leq \Omega \leq \Omega_p$), la **bande de transition** ($\Omega_p \leq \Omega \leq \Omega_a$) et la **bande atténuée** ($\Omega_a \leq \Omega \leq \pi$).

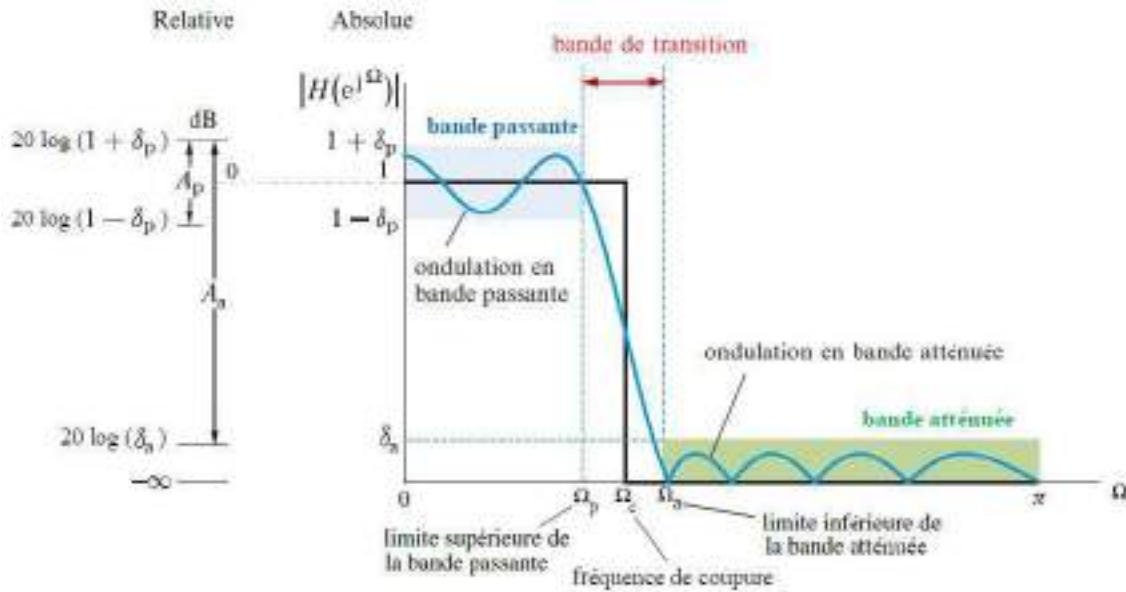


Figure 1. 18. Gabarit fréquentiel d'un filtre passe-bas.

Dans la **bande passante**, l'amplitude de la réponse fréquentielle est :

$$1 - \delta_p \leq |H(e^{j\Omega})| \leq 1 + \delta_p, \quad 0 \leq \Omega \leq \Omega_p \quad (1.74)$$

Où $\delta_p \ll 1$ pour un filtre bien conçu.

Dans la **bande atténuée**, l'amplitude de la réponse fréquentielle se rapproche de zéro avec une erreur de $\pm \delta_a$, $\delta_a \ll 1$; alors on a :

$$|H(e^{j\Omega})| \leq \delta_a, \quad \Omega_a \leq \Omega \leq \pi \quad (1.75)$$

Les écarts au gabarit se traduisent par des ondulations (ripple) et l'existence d'une **bande de transition** plus ou moins large dont sa largeur est $(\Omega_a - \Omega_p)$. Les fréquences limites (edge frequencies) en bandes passante Ω_p et atténuée Ω_a , sont en valeurs normalisées et on a :

$$\Omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_e} \quad \text{et} \quad \Omega_a = 2\pi \frac{f_a}{f_e} \quad (1.76)$$

Les taux d'ondulation, δ_p et δ_a , spécifient les tolérances acceptables en termes de valeurs absolues.

L'ensemble de ces trois contraintes (largeur de bande de transition, les ondulations δ_p et δ_a va déterminer l'ordre du filtre. Plus l'on sera stricte sur ces trois contraintes, plus l'ordre sera élevé. Le gabarit fréquentiel peut être aussi représenté sur une échelle logarithmique. On définit alors

l'ondulation en bande passante (passband ripple) A_p et l'atténuation en bande atténuée (stopband attenuation) A_a en dB par :

$$A_p \triangleq 20 \log_{10} \left(\frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \right) \quad (1.77)$$

$$A_a \triangleq 20 \log_{10} \left(\frac{1 + \delta_p}{\delta_a} \right) \approx -20 \log_{10}(\delta_a) \quad (1.78)$$

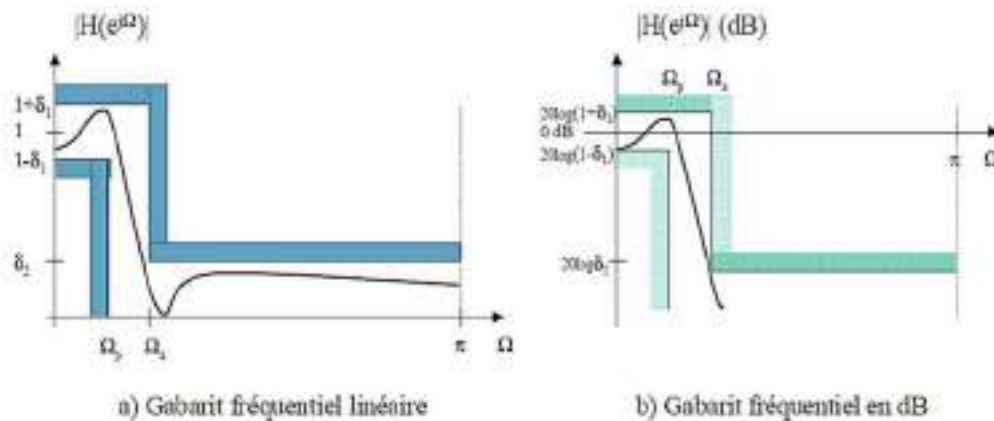


Figure 1. 19. Gabarit fréquentiel d'un filtre passe-bas.

1.9.2. Méthodes de synthèse d'un filtre RIF

Les filtres RIF présentent les avantages suivants : ils sont toujours stables et peuvent être conçus pour avoir une phase linéaire exacte. Ils nécessitent généralement plus de matériel et de temps de calcul.

L'objectif de la synthèse de filtre consiste à trouver un filtre causal (réalisable) qui s'approche le plus possible du filtre idéal recherché. Il existe trois principales méthodes pour la synthèse des filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF) :

- ✎ **La méthode du fenêtrage** : consiste à appliquer une fenêtre de taille N au filtre idéal équivalent ;
- ✎ **La méthode d'échantillonnage en fréquence** : utilise la Transformée de Fourier Discrète inverse depuis une fonction discrète représentative du filtre et définie en fréquence ;
- ✎ **Les méthodes d'optimisation** : se concentrent sur la minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle et le filtre idéal ;

Dans le cadre de ce cours, on se limite à la méthode la plus simple (mais pas la plus efficace) : la méthode dite de la fenêtre. En particulier, on impose que le filtre soit un filtre RIF (nécessaire si on veut "une phase linéaire").

1.9.2.1. Méthode de synthèse par fenêtrage

But : Synthétiser un filtre RIF (ou MA) causal, qui s'approche le plus possible du filtre idéal recherché.

Principe :

- Écrire la fonction de transfert idéale (sans oublier la périodicité).
- Calculer sa réponse impulsionnelle (qui est infinie) par décomposition en série de Fourier.
- La tronquer temporellement par l'application d'une fenêtre.
- Si nécessaire, ajouter un retard pour s'assurer de la causalité du filtre.
- Le résultat est un filtre RIF dont la réponse dépend :
 - du type de fenêtre
 - de sa longueur (ordre du filtre RIF)

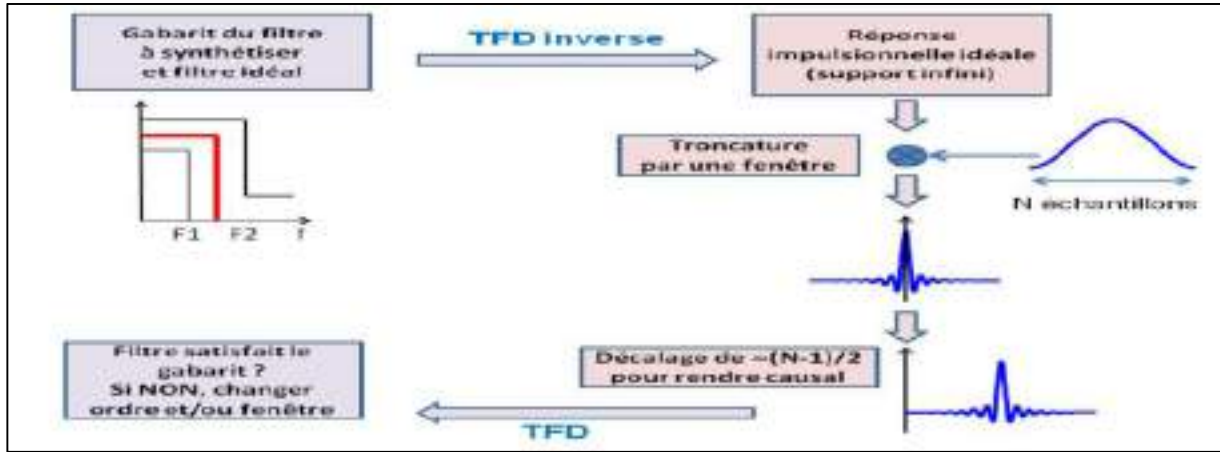


Figure 1. 20. Schéma fonctionnel de synthèse d'un filtre RIF par fenêtrage.

Dans cette méthode, on commence avec une réponse impulsionnelle désirée, c.-à-d. un filtre numérique idéal $H_d(e^{j\Omega})$, périodique de période 2π .

Il est décomposable en série de Fourier par sa réponse impulsionnelle :

$$H_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\Omega} \quad (1.79)$$

Sa réponse impulsionnelle peut être exprimée par TFTD inverse:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \int_{-1/2}^{+1/2} H_d(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi f n} df \quad (1.80)$$

Cette méthode produit un filtre non causale et à réponse impulsionnelle infinie. La manière la plus simple d'obtenir un filtre RIF approchant $H_d(e^{j\Omega})$ est limité $h_d(n)$ à N échantillons (troncature) par :

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.81)$$

Pour remédier le problème de limitation de $h_d(n)$, on peut représenter $h(n)$ comme le produit du filtre idéal $h_d(n)$ avec une fenêtre discrète à durée finie $w(n)$ (Troncature), on trouve :

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \quad (1.82)$$

On obtient dans ce cas un filtre numérique RIF approché $h(n)$ dont la réponse fréquentielle est modifiée par le phénomène de Gibbs.

Phénomène de Gibbs : l'ondulation introduite par la convolution entre le spectre de la fenêtre de troncature et le spectre du gabarit initial s'appelle le phénomène de Gibbs. L'amplitude des ondulations ainsi que leurs fréquences dépend de la fenêtre de troncature.

Remarque : L'amplitude des oscillations ne dépend pas de la longueur de la fenêtre, mais de sa forme. La fréquence des ondulations est-elle fonction de la longueur de la fenêtre. Plus la fenêtre est longue, plus les ondulations sont rapides et concentrées autour de la bande de transition.

Pour remédier le problème de la non causalité du filtre, on procède à un décalage de la réponse impulsionnelle $h(n)$ de manière à rendre le filtre causal donc réalisable en temps réel. La réponse $h(n)$ sera **symétrique** centrée sur 0, un décalage de α de la réponse impulsionnelle du filtre idéal $h_d(n)$ peut-être nécessaire afin de rendre le filtre $h(n)$ à phase linéaire. On aura alors :

$$h(n)_{\text{causal}} = h_d(n - \alpha) \cdot w(n), \quad \alpha = (N - 1)/2$$

La nouvelle réponse fréquentielle du filtre RIF ainsi synthétisé $H(e^{j\Omega})$:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega}) \Rightarrow H(f) = H_d(f) * W(f) \quad (1.83)$$

Exemple : filtre passe bas idéal : Supposons un gabarit idéal d'un filtre passe-bas. Sa réponse impulsionnelle est :

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{+\Omega_c} e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{n\pi} \sin \Omega_c n$$

$$h_d(n) = 2f_c \text{sinc}(2f_c n T_e)$$

On obtient ainsi une réponse impulsionnelle infinie, et il **est donc nécessaire de** la tronquer pour obtenir un RIF. $w(n)$ est la fenêtre rectangulaire définie par :

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases}$$

Sa TF est :

$$W(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\Omega} = \frac{1 - e^{-j\Omega N}}{1 - e^{-j\Omega}} = e^{-j\Omega(N-1)/2} \frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}$$

L'amplitude est :

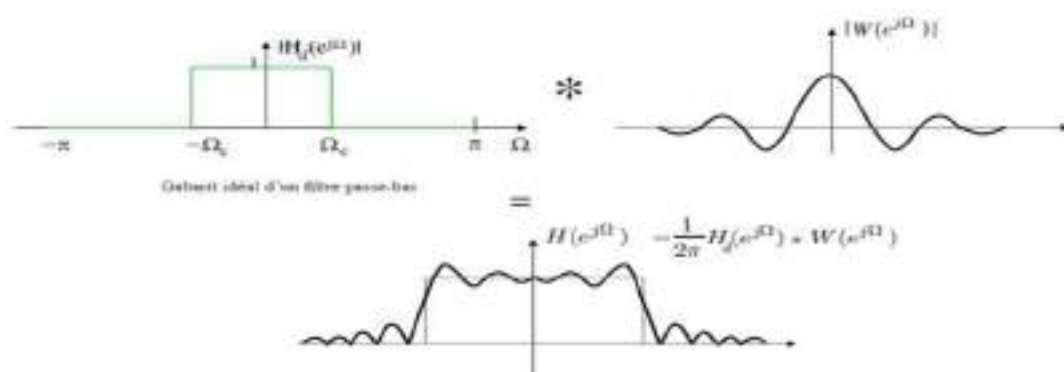
$$|W(e^{j\Omega})| = \frac{|\sin(\Omega N/2)|}{|\sin(\Omega/2)|}, \quad \pi \leq \Omega \leq \pi$$

La phase est :

$$\Theta(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -\Omega \left(\frac{N-1}{2} \right), & \text{si } \sin(\Omega N/2) \geq 0 \\ -\Omega \left(\frac{N-1}{2} \right) + \pi, & \text{si } \sin(\Omega N/2) < 0 \end{cases}$$

On a :

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega})$$



En pratique, on dispose de différentes fenêtres de pondération : Rectangulaire, Hamming, Hanning, Blackman, Une fenêtre spectrale est caractérisée dans le domaine fréquentiel par :

- ✚ La largeur du lobe principale qui définit la largeur de la transition de Gibbs
- ✚ Les lobes secondaires qui conduisent aux ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt.

On ne peut évidemment comparer que des fenêtres ayant le même nombre d'échantillons N . La fenêtre rectangulaire est celle qui assure la transition de Gibbs la plus étroite, par contre les ondulations dans les bandes passantes et d'arrêt sont importantes. La fenêtre de Hamming assure

quant à elle des ondulations moindres, par contre la largeur de la transition de Gibbs est plus importante, etc.

Nous rappelons l'expression de $w(n)$ de quelques fenêtres de pondération utilisées :

a) Fenêtre rectangulaire

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N \\ 0, & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases} \quad (1.84)$$

b) Fenêtre triangulaire (Bartlett)

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases} \quad (1.85)$$

c) Fenêtre de Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases} \quad (1.86)$$

d) Fenêtre de Hanning

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases} \quad (1.87)$$

e) Fenêtre de Blackman

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0 \text{ et } n \geq N \end{cases} \quad (1.88)$$

Type de fenêtre	Amplitude du lobe secondaire (Atténuation en dB)	Largeur du lobe principal $\Delta\Omega_m$		$\delta_p \approx \delta_a$	Ondulation en bande passante A_p (dB)	Atténuation min. en bande atténuée A_a (dB)
		Approx.	Exact			
Rectangulaire	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	0.09	0.75	21
Bartlett	-25	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	0.05	0.45	26
Hanning	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	0.0063	0.055	44
Hamming	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	0.0022	0.019	53
Blackman	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	0.0002	0.0017	74

Tableau 1.2. Caractéristiques des principales fenêtres.

Choix de la fenêtre dans la méthode de synthèse

Le choix de la fenêtre influe sur les performances du filtre. En particulier, les caractéristiques importantes et leur influence sur le filtre synthétisé sont détaillées ci-dessous :

- ✎ La largeur de la zone de transition $\Delta\Omega = |\Omega_p - \Omega_a|$ sera du lobe principal $\Delta\Omega_m$ donnée dans le tableau. Lorsque la fréquence de coupure ou de transition du filtre n'est pas trop proche de 0 ou de π on peut considérer que $\Delta\Omega \cong \frac{\Delta\Omega_m}{2}$. On voit donc que **la transition $\Delta\Omega$ sera d'autant plus faible que N sera grand.**
- ✎ Les ondulations en bande passante et en bande atténuée seront égales, on notera $A_a = \delta_p = \delta_a$ (en dB) et on parlera de filtre equiripple. Cette atténuation en dB est donnée par la dernière colonne du tableau. On voit que **A_a ne dépend que du type de fenêtre et non de N .**

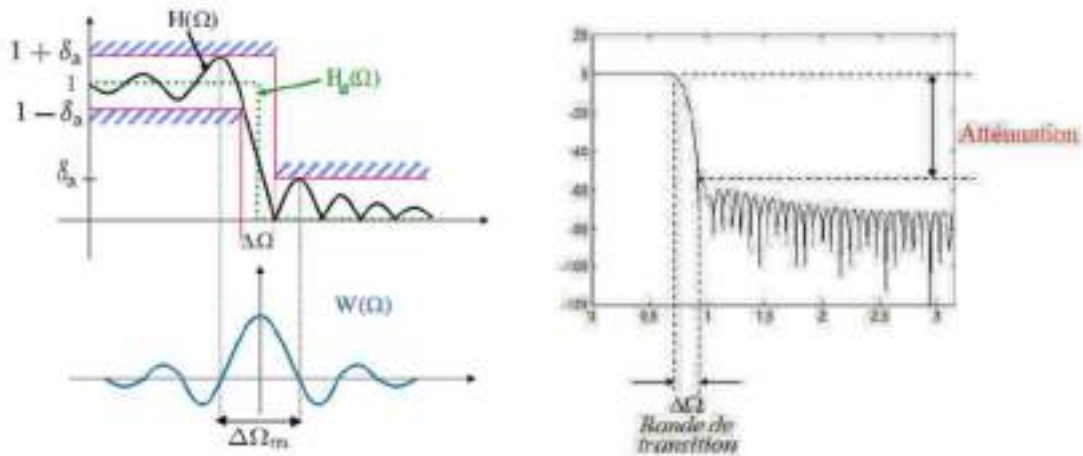


Figure 1. 21. Illustration de l'effet du fenêtrage sur le filtre idéal.

Le choix de la fenêtre de pondération dépend de la longueur de la fenêtre N et l'amplitude des lobes secondaires. La pondération temporelle introduit des ondulations et limite la fréquence coupure du filtre. Un compromis est à faire entre la raideur ($\Delta\Omega$) et l'amplitude des ondulations.

La procédure de synthèse d'un filtre numérique RIF par fenêtrage à partir de la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal $h(n)$ consiste à :

1. Choisir en fonction de l'atténuation A_a (δ_a) le type de fenêtre à utiliser,
2. Choisir en fonction de la largeur de la zone de transition $\Delta\Omega$ et du type de la fenêtre $w(n)$ la longueur de la réponse impulsionnelle.

Le filtre RIF résultant $h(n)$ est ensuite défini par $h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$. Il sera de longueur N .

Réglage :

δ_a désirée \rightarrow à choix type de fenêtre

$\Delta\Omega$ désirée \rightarrow à choix de N

Exemple 1:

On désire réaliser un filtre dérivateur à réponse impulsionnelle fini (RIF) ayant une caractéristique en phase linéaire par la méthode de la fenêtre ;

Les spécifications du filtre sont : $f_p = 4\text{KHz}$, $f_a = 5\text{KHz}$ avec une atténuation de 50dB .

Soit la fréquence d'échantillonnage $f_e = 20\text{KHz}$.

On a :

$$\Omega_p = 2\pi \frac{f_p}{f_e} = 2\pi \frac{4}{20} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

$$\Omega_a = 2\pi \frac{f_a}{f_e} = 2\pi \frac{5}{20} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

La réponse fréquentielle du filtre désiré est donc définie par :

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} j \frac{\Omega}{f_s} = j\Omega 20000 & \text{pour } -\frac{2\pi}{5} \leq \Omega \leq \frac{2\pi}{5} \\ 0 & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

La réponse en fréquence idéale du filtre est périodique, donc décomposable en série de Fourier. Sa transformée inverse n'est autre que sa réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned}
 h_d(n) &= \text{TFD}^{-1}(H_d(e^{j\Omega})) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/5}^{2\pi/5} H_d(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/5}^{2\pi/5} \Omega \cdot 20000 e^{jn\Omega} d\Omega \\
 h_d(n) &= \begin{cases} 20000 \left(\frac{4\pi \cos(2\pi n/5)}{5n} - 2 \frac{\sin(2\pi n/5)}{n^2} \right) & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

En se référant au tableau 1.2, pour une atténuation de 50 dB on peut choisir la fenêtre de **Blackman**. La bande de transition est :

$$\begin{aligned}
 \Delta\Omega &= \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10} \geq \frac{12\pi}{N} \\
 &\Rightarrow N \geq 120
 \end{aligned}$$

En choisissant $N=121$, on détermine le décalage temporel $\alpha = \frac{N-1}{2} = 60$

Et la réponse impulsionnelle du filtre différentiateur sera : $h(n) = h_d(n - \alpha) \cdot w(n)$,

$$h(n) = \begin{cases} 20000 \left(\frac{4\pi \cos\left(\frac{2\pi(n-60)}{5}\right)}{5(n-60)} - 2 \frac{\sin\left(\frac{2\pi(n-60)}{5}\right)}{(n-60)^2} \right) \times \left(0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{120}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{120}\right) \right) & 0 \leq n \leq 120, n \neq 60 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

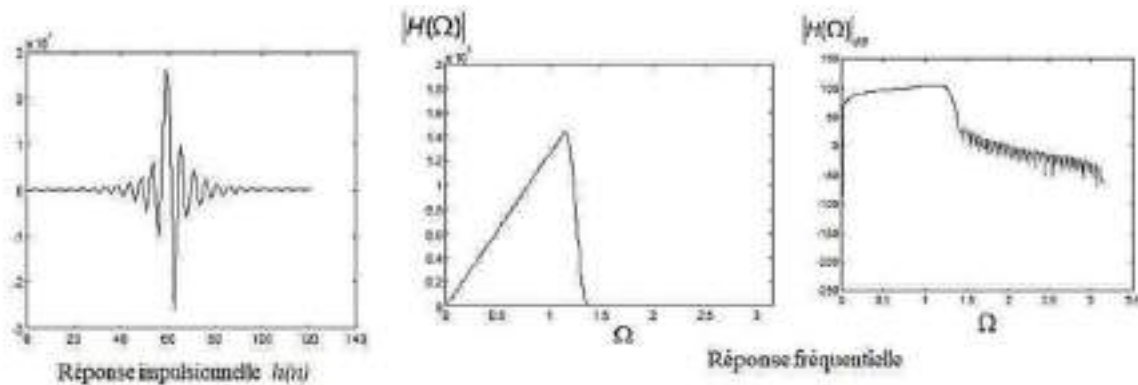


Figure 1. 22. Réponse impulsionnelle et fréquentielle.

Exemple 2: On veut synthétiser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = f_e/10$ avec $\Delta f = f_e/5$ et une ondulation en bande atténuée > 50 db

a- On normalise les fréquences $f_c/(f_e/2) \Rightarrow f_c=0.2$, $\Delta f/(f_e/2) \Rightarrow \Delta f=0.4$

b- $h(n) = f_c \frac{\sin(\pi n f_c)}{\pi n f_c} = 0.2 \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n/5}$ la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas.

c- On choisit $w(n)$ comme étant la fenêtre de Hamming

$$(\Delta_a = -20 \log(\delta_a) = -53) \Rightarrow \Delta f = 6.6/N$$

d- On calcule $N = 6.6/\Delta f = 16.5$ on prend $N=17$

e- On calcule les valeurs $h(n) = 0.2 \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n/5}$ pour $-8 \leq n \leq 8$

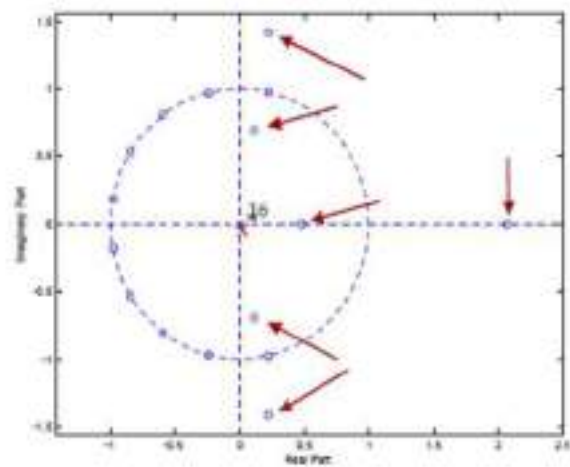
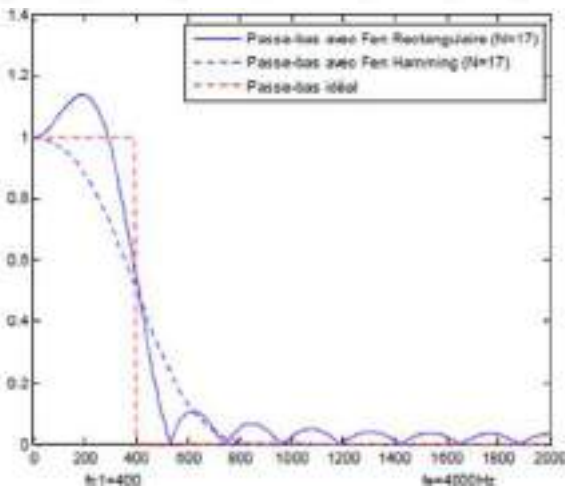
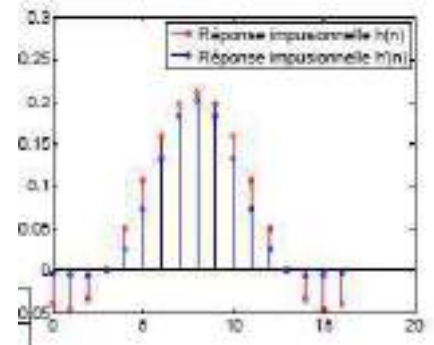
n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
n	1	2	3	4	5	6	7	8	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	

f- On multiplie $h(n)$ par $w(n)$ pour trouver $h'(n) = h(n) \cdot w(n)$

$$h'(n) = \left(0,2 \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n/5} \right) \cdot \left[0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{16}\right) \right]$$

g- On translate le résultat de 8 échantillons.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(n)$	-0,0399	-0,0456	-0,0329	0	0,0493	0,1064	0,1597	0,1974	0,2110
$h'_{28}(n)$	-0,0031	-0,0050	-0,0067	0	0,0255	0,0730	0,1325	0,1826	0,2023
n	9	10	11	12	13	14	15	16	
$h(n)$	0,1974	0,1597	0,1064	0,0493	0	-0,0329	-0,0456	-0,0399	
$h'_{28}(n)$	0,1826	0,1325	0,0730	0,0255	0	-0,006	-0,005	-0,0030	



On peut remarquer l'emplacement de zéros autour du premier 0 en 1 permet d'atténuer les lobes secondaire et de maintenir une réponse cste autour du zéro.

1.9.2.2. Méthode de synthèse par échantillonnage fréquentiel

La méthode de synthèse par échantillonnage en fréquence est appliquée depuis la réponse fréquentielle d'un filtre continu idéal $H_d(e^{j\Omega})$. A partir de celle-ci et d'une valeur de N fixée, on réalise un échantillonnage en fréquence de pas $\Omega_e = 2\pi/N$ définie par :

$$\hat{H}(e^{jk\Omega_e}) \triangleq H_d(e^{j\Omega})|_{\Omega = \frac{2k\pi}{N}} \quad (1.89)$$

Le filtre RIF est alors trouvé par TFD inverse :

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{H}(e^{jk\Omega_e}) e^{2j\pi \frac{n}{N} k}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \hat{h}(n) &= 0, \text{ ailleurs} \end{aligned} \quad (1.90)$$

Cette méthode de synthèse est très simple et permet de réaliser toute forme de filtre. De plus, elle peut être combinée avec la méthode du fenêtrage. La fonction de transfert en Z du filtre sera :

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{h}(n) z^{-n} \quad (1.91)$$

1.9.3. Méthodes de synthèse d'un filtre RII

La synthèse d'un filtre numérique RII, est la recherche d'une fonction $H(z)$ (ou $h(n)$) correspondant à la spécification sous forme de gabarit. Le principe de la synthèse d'un filtre RII est la d'abord faire la synthèse des filtres analogiques à une fonction $H(p)$. Ensuite transformer le filtre analogique en filtre numérique de $H(z)$ qui répond aux spécifications désirées. La recherche de cette fonction peut être réalisée selon diverses méthodes.

- ✎ **La méthode bilinéaire** : à partir de la synthèse des filtres analogiques aboutissant à une fonction $H(p)$, utiliser la transformation du plan de Laplace p vers le plan de Z .
- ✎ **La méthode de l'invariance impulsionnelle** : consiste à définir un filtre numérique par sa réponse impulsionnelle est obtenue à partir de la discrétisation de la réponse impulsionnelle du filtre analogique.
- ✎ **Techniques d'optimisation** : consiste à rechercher une fonction $H(z)$ s'approchant le plus possible d'une fonction prototype. Ceci par la minimisation d'un critère d'erreur entre courbe réelle et courbe idéale.

1.9.3.1. Méthode de l'invariance impulsionnelle

La méthode de l'invariance impulsionnelle consiste à effectuer la synthèse d'un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle $h(nT)$ est l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle $h_a(t)$ du filtre analogique équivalent. On a alors :

$$h(nT) \triangleq h_a(t)|_{t=nT} \quad (1.92)$$

Avec T : la période d'échantillonnage.

Pour faire la synthèse d'un filtre numérique par l'invariance impulsionnelle, on procède comme suit :

- On détermine la réponse impulsionnelle désirée $h_a(t)$ d'un filtre analogique connu.
- On échantillonne cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_e et on en déduit la suite $h(n)$.
- On recherche la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique qui a pour réponse impulsionnelle la suite $h(n)$.

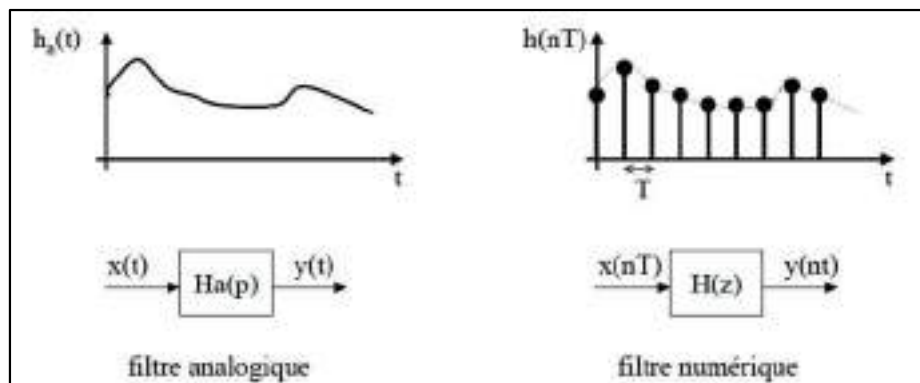


Figure 1. 23. Conservation de la réponse impulsionnelle entre les filtres analogique et numérique

Pour obtenir $h(n)$, on peut opérer de 2 manières:

$$H_a(p) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{t=nT} h(n) = h_a(nT) \xrightarrow{TZ} H(z)$$

$$H(z) = \sum_{\text{pôles } p_i \text{ de } H_a(p)} \text{Résidus} \left(\frac{H_a(p)}{1 - z^{-1}e^{p_i T}}, p_i \right)$$

1) La fonction de transfert du filtre analogique $H_a(p)$ possède N pôles simples p_i , on peut écrire :

$$H_a(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{p + p_i} \Rightarrow h_a(t) = \sum_{i=1}^N k_i e^{-p_i t} \quad (1.93)$$

2) Si on échantillonne la réponse impulsionnelle du filtre analogique par $h(nT) = h_a(t)|_{t=nT}$, on obtient la fonction de transfert du filtre numérique $H(z)$:

$$h(n) = \sum_{i=1}^N k_i e^{-p_i nT} \Rightarrow H(z) = \sum_{i=1}^N k_i \frac{z}{z - e^{-p_i T}} = \sum_{i=1}^N k_i \frac{1}{1 - e^{-p_i T} z^{-1}} \quad (1.94)$$

Si on étend cette formulation de $H(z)$ à tout type de fonction $H_a(p)$, on peut, en utilisant la formule des résidus, obtenir une relation directe entre $H_a(p) \Leftrightarrow H(z)$:

$$H(z) = \sum_{p_i \text{ de } H_a(p)} \text{Res} \left(\frac{H_a(p)}{1 - e^{pT} z^{-1} e^{pT}}, p_i \right) \quad (1.95)$$

Cette méthode de synthèse est simple. Elle conserve la réponse temporelle du filtre analogique équivalent et également la stabilité du filtre. Par contre, la réponse fréquentielle du filtre n'est pas conservée. En effet, cette transformation suit logiquement le théorème d'échantillonnage et le phénomène de recouvrement de spectre. Son utilisation doit respecter les contraintes dues à l'échantillonnage, en particulier une bande passante inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. La réponse fréquentielle est donnée par la formulation :

$$H(e^{j\omega T}) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{T} \sum_k H_a \left(j\omega + j \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (1.96)$$

Par conséquent, la méthode de l'invariance impulsionnelle n'est applicable qu'aux filtres à bande limitée satisfaisant l'équation :

$$|H_a(j\omega)| \simeq 0 \text{ pour } |\omega| > \omega_B \text{ avec } \omega_B < \pi f \quad (1.97)$$

Remarque :

- Relation entre les fréquences digitale et analogique est donnée par: $\omega = \Omega T$; $e^{j\omega} = e^{j\Omega T}$
- Le cercle unitaire est défini par $z = e^{j\omega}$
- L'axe imaginaire est défini par $p = j\Omega$
- $z = e^{j\omega}$ est alors la transformation de p-plan à z-plan.

Exemple 1 :

On veut synthétiser un filtre numérique qui possède la même réponse impulsionnelle qu'un filtre passe-bas analogique du 1^{er} ordre de transmittance normalisée : $H_a(p) = \frac{1}{1+p}$

On commence par dénormaliser $H_a(p) = H_a(p)|_{p=p/\omega_c} = \frac{1}{1+(p/\omega_c)} = \frac{\omega_c}{\omega_c + p}$

La réponse impulsionnelle est alors $h_a(t) = \omega_c e^{-\omega_c t}$ pour $t \geq 0$

$$\Rightarrow h(n) = T_s \omega_c e^{-nT_s \omega_c} \text{ pour } n \geq 0 \Rightarrow H(z) = T_s \omega_c \frac{1}{1 - e^{-T_s \omega_c} z^{-1}} = T_s \omega_c \frac{z}{z - e^{-T_s \omega_c}}$$

Il s'avère qu'il y a égalité entre les 2 réponses à un coefficient K près, on posera donc : $H(z) = K T_s \omega_c \frac{1}{1 - e^{-T_s \omega_c} z^{-1}}$

Sachant que $p = 2\pi j f$, pour $f=0$, $H_a(0)=1$ et $z = e^{2\pi j f T_s}$, pour $f=0$, $H(0) = K T_s \omega_c / (1 - e^{-T_s \omega_c}) \Rightarrow H(z) = \frac{1 - e^{-T_s \omega_c}}{1 - e^{-T_s \omega_c} z^{-1}}$

Exemple 2 : On considère le filtre analogique d'ordre 3 associé à la fonction d'approximation de Butterworth. Réaliser le filtre numérique passe-bas correspondant en utilisant la méthode de l'invariance impulsionnelle. La fréquence de coupure est $f_c=1$ kHz et la fréquence d'échantillonnage $f_e=10$ kHz.

Rappelons que le filtre de Butterworth d'ordre 3 est forme de 2 cellules d'ordre 1 et 2, respectivement :

$$H_N(p) = \frac{1}{(1+p)(1+p+p^2)} \quad \text{alors} \quad H(p) = \frac{1}{(1+p/\omega_c)(1+p/\omega_c+(p/\omega_c)^2)}$$

Pour éviter de décomposer en éléments simple, on peut calculer $H(z)$ en utilisant les relations entre transformées de Laplace et en z pour les systèmes du premier et du second ordre.

$H(p)$	$T_c.H(z)$
$\frac{1}{p+a}$	$T_s \frac{1}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$T_s \frac{1-e^{-aT_s}z^{-1}\cos(\omega_0T_s)}{1-2e^{-aT_s}z^{-1}\cos(\omega_0T_s)+e^{-2aT_s}z^{-2}}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$T_s \frac{e^{-aT_s}z^{-1}\sin(\omega_0T_s)}{1-2e^{-aT_s}z^{-1}\cos(\omega_0T_s)+e^{-2aT_s}z^{-2}}$

A cette fin, on décompose alors $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = \frac{A}{(\omega_c + p)} + \frac{Bp + C}{(\omega_c^2 + \omega_c p + p^2)}$$

Par identification, on trouve $C=0$, $A=-B=\omega_c \Rightarrow H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \frac{\omega_c p}{(\omega_c^2 + \omega_c p + p^2)}$

Les pôles de ce filtre analogique sont $p_1 = -\omega_c = -2000\pi$ $p_{2,3} = -\omega_c \frac{1 \pm \sqrt{3}j}{2} = -1000\pi(1 \pm \sqrt{3}j) = -\alpha \pm j\omega_0$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \frac{\omega_c p}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

$$H(p) = \frac{\omega_c}{(\omega_c + p)} - \omega_c \frac{p + \frac{\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}} + \frac{\omega_c}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}\omega_c}{2}}{\left(p + \frac{\omega_c}{2}\right)^2 + 3\frac{\omega_c^2}{4}}$$

En se servant du tableau donné, on peut alors déterminer $H(z)$:

$$H(z) = T_s \omega_c \frac{1}{1-e^{-\alpha T_s}z^{-1}} - T_s \omega_c \frac{1-e^{-\pi/10}\cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1}}{1-2e^{-\pi/10}\cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1}+e^{-\pi/5}z^{-2}} + T_s \omega_c \frac{e^{-\pi/10}\sin(\pi\sqrt{3}/10)}{1-2e^{-\pi/10}\cos(\pi\sqrt{3}/10)z^{-1}+e^{-\pi/5}z^{-2}}$$

Ce qui nous donne :

$$H(z) = \pi/10 \frac{1}{1-0.5335z^{-1}} - \pi/10 \frac{(1-0.625z^{-1})}{1-1.25z^{-1}+0.5335z^{-2}} + \pi/10 \frac{0.218}{1-1.25z^{-1}+0.5335z^{-2}}$$

$$H(z) = \pi/10 \left(\frac{1}{1-0.5335z^{-1}} - \frac{0.781-0.625z^{-1}}{1-1.25z^{-1}+0.5335z^{-2}} \right)$$

Il reste à déterminer le gain K en adaptant les gains des deux filtres analogique et numérique pour une fréquence donnée. Comme il s'agit d'un filtre passe-bas, on supposera l'égalité pour $f=0$ ($p=0$ et $z=1$)

1.9.3.2. La transformée bilinéaire

La synthèse des filtres RII se réalise sur la base des fonctions modèles du filtrage analogique (Tchebychev, Butterworth,...) par l'intermédiaire de la transformée bilinéaire, la méthode la plus utilisée pour synthétiser des filtres récurrents est la transformation bilinéaire. Elle permet de transformer un filtre analogique stable en un filtre numérique stable. Le but étant de préserver la réponse en fréquence, préserver la stabilité du filtre et d'éviter les problèmes de spectres. La transformation bilinéaire se déduit à partir de la formule trapézoïdale d'intégration numérique. Elle permet de passer d'un filtre analogique $H(p)$ à un filtre numérique dont la fonction de transfert $H(z)$ est s'écrit de la façon suivante :

$$H(p) \triangleq H(z) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (1.98)$$

T_e est la période d'échantillonnage.

La transformation inverse donnée par :

$$z = \frac{2/T_e + p}{2/T_e - p} = \frac{2/T_e + j\omega_a}{2/T_e - j\omega_a} \quad (1.99)$$

Cette transformation permet en effet de passer de $H(p)$ à $H(z)$ en conservant la stabilité et la réponse en fréquence du filtre. Cependant elle introduit une distorsion en fréquence que l'on peut compenser lors du passage de l'analogique $H(\omega_a)$ vers le numérique $H(\omega)$ de la manière suivante :

$$\frac{\omega_a T_e}{2} = \tan\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) \Rightarrow f_a \pi = \frac{1}{T_e} \tan(\pi f T_e) \quad (1.100)$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{\pi T_e} \tan^{-1}(\pi f_a T_e) \quad (1.101)$$

La figure suivante montre que l'ensemble de l'axe imaginaire du plan p est transformé vers le cercle unité du plan z de manière bijective. De plus, le domaine de stabilité (demi-plan gauche du plan p) est transformé vers le disque unité.

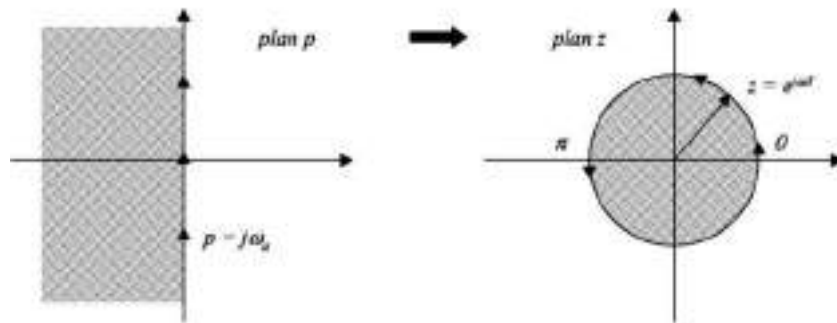


Figure 1. 24. Transformation du plan p vers le plan z

Grâce à la transformation bilinéaire la synthèse des filtres numériques de type RII se résume à approcher le gabarit désiré par des fonctions modèles définies en p puis à transformer ces dernières pour obtenir directement les coefficients du filtre. Plusieurs fonctions modèles permettent d'approcher au mieux un gabarit demandé. Les plus célèbres d'entre elles sont des fonctions de Butterworth, Bessel, elliptiques ou des polynômes de Tchebycheff.

La méthodologie de synthèse par la transformation bilinéaire doit donc suivre les étapes suivantes:

- On définit les caractéristiques souhaitées du filtre numérique (fréquence d'échantillonnage, de coupure, etc.)

- On calcule les pulsations analogiques ω_A correspondant aux pulsations numériques ω_N :

$$\omega_a = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \tan\left(\frac{\pi f}{f_e}\right) \quad (1.102)$$

- On détermine le gabarit du filtre analogique $H_a(p)$ normalisée d'ordre n (Chebyshev, Butterworth, etc.) qui servira de modèle au filtre numérique et on écrit la fonction de transfert dénormalisée $H(p)$ de ce filtre analogique (qu'il faut recalculer en fonction de ω_a).
- On applique la transformation bilinéaire : $H(p) \triangleq H(z) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$, pour obtenir le filtre numérique $H(z)$.

Exemple 1 : On désire concevoir un filtre passe-bas numérique de premier ordre à partir d'une fonction de transfert d'un filtre RC dans le domaine continu ($H_N(p) = 1/(1+p)$). La fréquence de coupure désirée est $f_N=30$ Hz et la fréquence d'échantillonnage est $f_e=150$ Hz.

$$\begin{aligned} \text{On calcule d'abord } \omega_a &= \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{2}{T_e} 0.7265 \text{ puis } H(p) = \frac{1}{(1+p)} \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{p + \frac{2}{T_e} 0.7265} \\ H(z) &= H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.7265}{\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{2}{T_e} 0.7265} = \frac{0.7265(z+1)}{(z-1) + 0.7265(z+1)} = \frac{0.7265(z+1)}{1.7265z - 0.2735} \\ \text{On peut remarquer que } f_A &= \frac{2}{T_e(2\pi)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{f_e}{\pi} 0.7265 = 34.69 \neq f_N = 30 \end{aligned}$$

Exemple 2 : On désire réaliser un filtre numérique passe-bas du second ordre avec les caractéristiques suivantes : fréquence de coupure $f_N= 500$ Hz (gain de 1), fréquence d'échantillonnage $f_e=5$ kHz,

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_N T_e}{2}\right) = \frac{2}{T_e} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{2}{T_e} 0.325 \\ H_N(p) &= \frac{0.1075 p}{p^2 + 0.1075 p + 1} \Rightarrow H(p) = \frac{0.1075 p \omega_a}{p^2 + 0.1075 p \omega_a + \omega_a^2} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.035 p}{p^2 + \frac{2}{T_e} 0.035 p + \frac{4}{T_e^2} 0.1056} \\ H(z) &= H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{\frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{2}{T_e} 0.035 \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} + \frac{4}{T_e^2} 0.1056} = \frac{0.035 \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0.035 \frac{z-1}{z+1} + 0.1056} \\ H(z) &= \frac{0.035(z-1)(z+1)}{(z-1)^2 + 0.035(z-1)(z+1) + 0.1056(z+1)^2} = \frac{0.035(z^2-1)}{1.14z^2 - 1.7888z + 1.0706} \end{aligned}$$

Pour un filtre numérique passe-bas ou passe-haut, on peut déterminer $H(z)$ directement à partir de $H_N(p)$ en utilisant la pulsation normalisée $\Omega_c = \tan\left(\frac{\pi f_N}{f_e}\right)$ et remplacer p dans $H_N(p)$ comme suit :

$$\text{- pour un passe-bas par } p = \frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1} \text{ soit } H(z) = H_N(p) \Big|_{p=\frac{1}{\Omega_c} \frac{z-1}{z+1}}$$

$$\text{- pour un passe-haut par } p = \Omega_c \frac{z+1}{z-1} \text{ soit } H(z) = H_N(p) \Big|_{p=\Omega_c \frac{z+1}{z-1}}$$

- pour un passe bande ou un rejeteur de bande, la détermination de ω_a s'obtient par la pulsation centrale

$$\omega_A = \sqrt{\omega_{A1} \omega_{A2}}$$

1.10. Les systèmes multi-cadences

Les systèmes de TNS utilisés jusqu'alors ne considèrent qu'une seule fréquence d'échantillonnage F_e . Les systèmes multi-cadences changent la fréquence d'échantillonnage au cours de la chaîne de traitement afin qu'elle soit la plus adaptée aux traitements à réaliser. Par exemple, il est aisé de comprendre qu'après un filtrage sélectif passe-bas il est possible de réduire la fréquence d'échantillonnage à une valeur équivalente à deux fois la bande passante du filtre passe-bas réalisé, sans pour autant transgresser le théorème d'échantillonnage de Shannon. Cette réduction permet de diminuer la complexité du filtrage à réaliser.

Les principaux opérateurs utilisés en traitement du signal multi-cadences sont la décimation (réduction d'un facteur M de la fréquence d'échantillonnage) et l'interpolation (augmentation d'un facteur M de la fréquence d'échantillonnage) ou une combinaison des deux.

1.10.1. Réduction de la fréquence d'échantillonnage

La réduction de la fréquence d'échantillonnage, ou décimation, ou encore sous-échantillonnage, par un facteur M entier est une opération simple puisqu'il suffit de ne garder que 1 échantillon sur M de la séquence d'origine. Soit un signal continu $x_c(t)$ échantillonné à la période T représenté par la séquence $x(n) = x_c(nT)$, on posera donc le résultat de la décimation de $x(n)$ d'un facteur M par la relation suivante :

$$x_d(n) = x(nM) \quad (1.103)$$

La notation graphique utilisée est $\downarrow M$ (voir figure 11.1). Si la fréquence d'échantillonnage en entrée du décimateur est F_e , alors celle de sortie vaudra $F'_e = F_e/M$. La période d'échantillonnage en sortie vaudra quant à elle $T' = MT$.

Afin que l'opération de décimation s'effectue sans recouvrement de spectre, il est nécessaire que le spectre du signal $x_c(t)$ respecte le théorème de Shannon au regard de la fréquence F'_e . Cela implique que si $X_c(j\omega)$, la TF de $x_c(n)$, est à bande limitée, i.e. $X_c(j\omega) = 0$ pour $|\omega| \leq \omega_0$, alors $x_d(n)$ est une représentation exacte de $x_c(t)$ si $\pi/T' = \pi/(MT) \geq \omega_0$ ou encore $2\pi F'_e = 2\pi F_e/M$.

Dans le cas où le sous échantillonnage ne pourra s'effectuer sans recouvrement de spectre, il faudra alors en limiter la bande par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F'_e/2$.

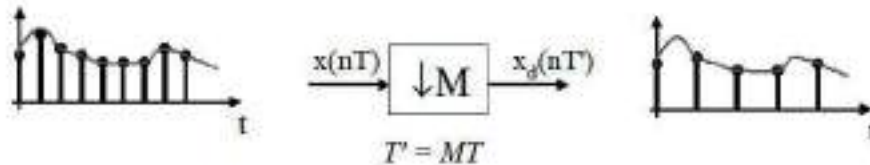


Figure 1. 25. Décimation d'un signal.

Il est utile de chercher une relation entre le spectre de $x(n)$ et celui de $x_d(n)$. On peut poser :

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\Omega}{T} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \quad (1.104)$$

De manière similaire :

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T'} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\Omega}{T'} - \frac{2\pi l}{T'} \right) \right) = \frac{1}{MT} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\Omega}{MT} - \frac{2\pi l}{MT} \right) \right) \quad (1.105)$$

Afin de trouver la relation entre les équations 1.104 et 1.105 les indices des sommes peuvent être exprimés par $l = i + kM$ où $0 \leq i \leq M - 1$ et l'équation 1.105 peut être réécrite de la manière suivante :

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(j \left(\frac{\Omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] \quad (1.106)$$

On obtient alors la relation

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega/M - 2\pi i/M)}) \quad (1.107)$$

La décimation est illustrée à la figure 1.26. L'équation 1.107 montre que le spectre $X_d(e^{j\Omega})$ est composé de M copies de $X(e^{j\Omega})$ mises à l'échelle par un facteur $1/M$ et décalées par des entiers multiples de 2π .

Par conséquent, un décimateur sera en pratique composé filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $F_c = 1/2T' = 1/2TM$ suivi d'un opérateur de décimation $\downarrow M$ comme représenté à la figure 1.27.

1.10.2. Augmentation de la fréquence d'échantillonnage

L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage, ou interpolation, ou encore sur-échantillonnage, par un facteur L entier est une opération consistant à augmenter le nombre d'échantillons de la séquence d'origine d'un facteur L . Soit un signal continu $x_c(t)$ échantillonné à la période T représenté par la séquence

$$x(n) = x_c(nT) \quad (1.108)$$

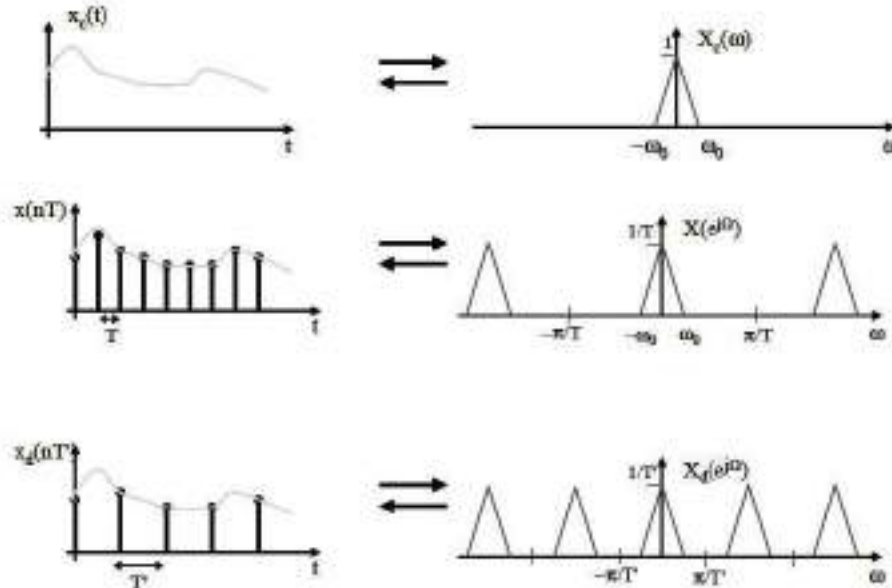


Figure 1. 26. Représentation d'un signal continu $x_c(t)$ et de son échantillonnage à 2 fréquences différentes et de leurs spectres respectifs.

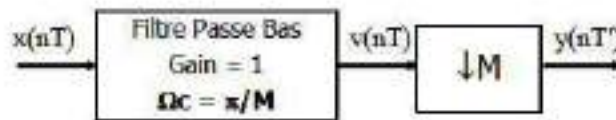


Figure 1. 27. Décimateur : filtrage passe-bas suivi d'une décimation.

On posera donc le résultat de l'interpolation de $x(n)$ d'un facteur L par la relation suivante :

$$x_i(n) = x_c(nT') = x_c(nT/L), \quad (I. 109)$$

avec $T' = T/L$ la période d'échantillonnage en sortie de l'interpolation ou $F'_e = F_e/L$ la fréquence d'échantillonnage en sortie de l'interpolation.

À partir des équations 1.108 et 1.109, on peut déduire que :

$$x_i(n) = x_c(nT/L) = x(n/L), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (1.110)$$

1.10.2.1 Élévateur de fréquence d'échantillonnage

On définit par élévateur de fréquence, le système décrit à la figure 1.28 consistant en l'ajout de $L-1$ zéros entre deux échantillons successifs de la séquence d'entrée $x(n)$ défini par :

$$x_e(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.111)$$

Ou de manière équivalente :

$$x_e(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n - kL) \quad (1.112)$$

La notation graphique utilisée est $\uparrow L$ (voir figure 1.28). Si la fréquence d'échantillonnage en entrée de l'élévateur de fréquence est F_e , alors celle de sortie vaudra $F'_e = F_e \cdot L$. La période d'échantillonnage en sortie vaudra quant à elle $T' = T/L$.

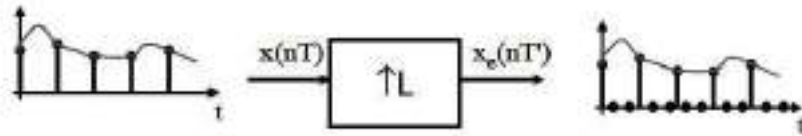


Figure 1. 28. Élévateur de fréquence d'un facteur L : ajout de $L-1$ zéros entre deux échantillons.

L'opération $\uparrow L$ peut être étudiée dans le domaine fréquentiel afin de comprendre son utilité dans le cadre de l'interpolation. La TF de $x_e(n)$ s'exprime :

$$X_e(e^{j\omega T'}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(nT') e^{-j\omega nT'} \quad (1.113)$$

$$= \sum_{n=0, \pm L, \pm 2L, \dots} x\left(\frac{nT}{L}\right) e^{-j\omega nT'} \quad (1.114)$$

En posant $n = kL$, on obtient :

$$X_e(e^{j\omega T'}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-j\omega kLT'} \quad (1.115)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-j\omega kT} \quad (1.116)$$

$$= X(e^{j\omega T}) \quad (1.117)$$

L'ajout de zéros n'a donc aucun effet sur le spectre, si ce n'est l'écartement de l'intervalle de périodisation d'un facteur L . Ceci est illustré à la figure 1.29. On s'aperçoit alors qu'un filtrage passe-bas idéal de gain L et de fréquence de coupure $F_c = 1/2T$ permet de retrouver la forme du spectre correspondant à $x_c(t)$ échantillonné à T' .

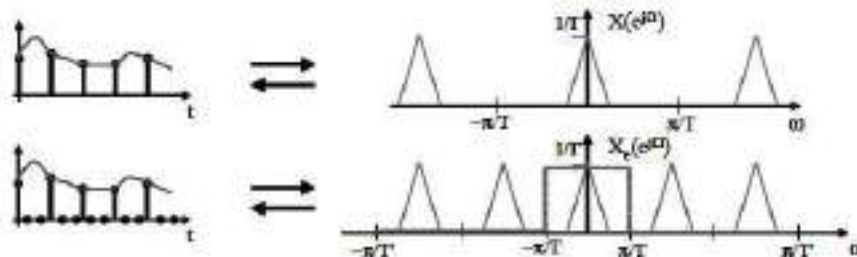


Figure 1. 29. Influence sur le spectre d'un signal interpolé par des zéros.

1.10.2.2 Interpolation

Un interpolateur (voir figure 1.30) sera donc défini comme la succession d'un élévateur de fréquence $\uparrow L$, suivi d'un filtrage passe-bas idéal de gain L et de fréquence de coupure $F_c = 1/2T$ (ou $\Omega_c = \pi/L$).

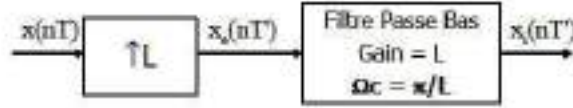


Figure 1. 30. Principe de l'interpolation d'un signal

D'autres systèmes d'interpolation sont connus (interpolation linéaire ou par TFD) mais ne seront pas détaillés ici.

1.10.2.3 Multiplication de la fréquence d'échantillonnage par un facteur rationnel

La figure 1.31 représente un schéma permettant de multiplier la fréquence d'échantillonnage d'un système par un facteur rationnel $R = L/M$. On aura alors $F'_e = R.F_e = L.F_e/M$ ou encore $T' = T/R = T.M/L$. Pour cela, il suffit d'effectuer tout d'abord une interpolation par un facteur $\uparrow L$, puis une décimation par un facteur $\downarrow M$. Les deux filtres présents dans la décimation (voir figure 1.27) et dans l'interpolation (voir figure 1.30) peuvent alors réunis dans un seul et même filtre dont la fréquence de coupure F_c dépendra des valeurs relatives de L et M selon :

- soit $R > 1 \Leftrightarrow M < L \Leftrightarrow F'_e > F_e \Rightarrow F_c = \frac{1}{2T'}$,
- soit $R < 1 \Leftrightarrow M > L \Leftrightarrow F'_e < F_e \Rightarrow F_c = \frac{1}{2T}$.

On peut également écrire :

$$F_c = \min\left(\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T'}\right) \quad (1.118)$$

Ou encore

$$\Omega_c = \min\left(\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right) \quad (1.119)$$

Car le filtre passe-bas travaille à une fréquence d'échantillonnage $L.F_e$ (ou encore $M.F'_e$).

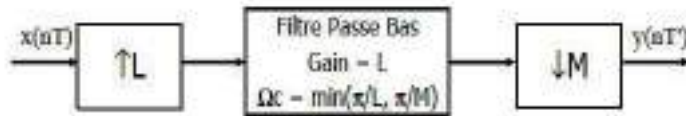


Figure 1. 31. Multiplication de la fréquence d'échantillonnage par un facteur rationnel $R = L/M$

Série de TD N°01

1/TRANSFORMEE EN Z

Exercice 01 :

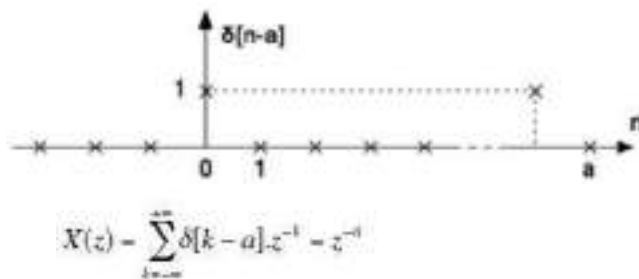
Calculer la Transformée en z des signaux suivants en précisant leurs domaine de convergence D :

- 1) $x_1[n] = \delta[n]$
- 2) $x_2[n] = \delta[n - a]$
- 3) $x_3[n] = u[n]$
- 4) $x_4[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- 5) $x_5(n) = a^n$ avec $n \geq 0$

SOLUTION :

1) $x_1[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = z^0 = 1 \forall z \in \mathbb{C}$, Donc RDC = \mathbb{C}

2) $x_2[n] = \delta[n - a]$



RDC = \mathbb{C}^* pour $(a > 0)$

4) $x_4[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad \text{converge si } |z| > 0$$

5) $x_5(n) = a^n u(n)$

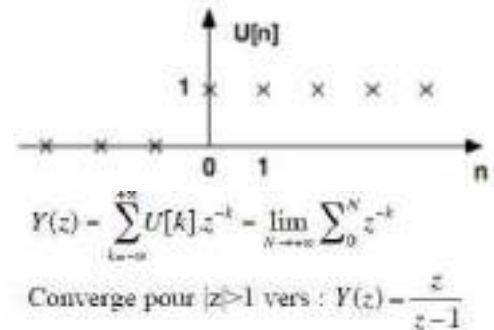
$$\text{On a } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n$$

Cette somme ne sera finie que si $|a z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

On obtient alors

$$X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$

3) $x_3[n] = u[n]$



Exercice 02 :

Calculer la Transformée en z (TZ) des signaux suivants :

1) $x(n) = a^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

La série précédente converge si et seulement si $|a z^{-1}| < 1$, c'est-à-dire ssi $|z| > |a|$.

2) $x(n) = n u(n)$

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} U(z) = -z \left(\frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad \text{pour } |z| > 0$$

3) $x[n] = u[n] - u[n - a]$, $a \in \mathbb{N}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{a-1} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(a-1)} = \frac{z^a - 1}{z - 1} \cdot z^{1-a} \quad \text{pour } |z| > 0$$

Exercice 03 :

Calculer la transformée en z (TZ) du signal porte discret $x[n] = \Pi_T[n]$

- En appliquant directement la définition ;
- En utilisant l'échelon de Heaviside discret $u[n]$ et le théorème du retard.

Comparer les deux résultats.

Solution

$$1) \quad TZ(\Pi_T[k]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi_T[k] z^{-k} = \sum_0^{T-1} z^{-k} = \frac{1 - z^{-T}}{1 - z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad TZ(\Pi_T[k]) &= TZ((U[k]) - U[k - T]) \\ &= TZ(U[k]) - TZ(U[k - T]) \\ &= (1 - z^{-T}) TZ(U[k]) \\ &= \frac{1 - z^{-T}}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Exercice 04 :

Soit un système linéaire invariant dans le temps avec la réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad \text{et la séquence d'entrée est donnée par : } x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Déterminer la TZ de la séquence de sortie $Y(z)$ telle que $Y(z) = X(z) \times H(z)$

Solution

1- Calcul de $Y(z)$?

Puisque $y(n) = x(n) * h(n)$

$$Y(z) = X(z) H(z)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{avec } |z| > 0$$

Finalement, on trouve

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z^2 (1 - z^{-N})}{(z-1)(z-a)} \quad \text{avec } |z| > 0$$

Exercice 05 :

Déterminer $X(z)$ pour le signal causal $x(n)$ produisant périodiquement les échantillons :

1. $x[0] = 0$, $x[1] = 1$, $x[2] = 2$, $x[3] = 0$, $x[4] = 1$, $x[5] = 2$, $x[6] = 0 \dots$

Solution

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] z^{-k}$$

$$\begin{aligned} \text{Définition} \Rightarrow &= \sum_{n=0}^{+\infty} 0 z^{-3n} + 1 z^{-(3n+1)} + 2 z^{-(3n+2)} \\ &= (z^{-1} + 2z^{-2}) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-3n} \end{aligned}$$

$$\text{Pour } |z| > 1, X(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - z^{-3}}$$

Exercice 06 :

Trouver les séquences temporelles $x(n)$ des transformées en z suivantes :

$$1. X(z) = 2 + \frac{4z}{z-1} + \frac{z}{z-0.5}$$

$$x(n) = 2\delta(n) + 4u(n) - (0.5)^n u(n).$$

$$2. X(z) = \frac{5z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-0.5)^2}$$

$$x(n) = 5nu(n) - 4n(0.5)^n u(n).$$

$$3. X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)^2}$$

a. Dividing both sides of the previous z -transform by z yields

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5} + \frac{C}{(z-0.5)^2},$$

$$\text{where } A = (z-1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{z}{(z-0.5)^2} \Big|_{z=1} = 4.$$

Using the formulas for m th-order real poles in Table 5.3, where $m = 2$ and $p = 0.5$, to determine B and C yields

$$\begin{aligned} B = R_2 &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \left\{ (z-0.5)^2 \frac{X(z)}{z} \right\} \Big|_{z=0.5} \\ &= \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) \Big|_{z=0.5} = \frac{-1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0.5} = -4 \\ C = R_1 &= \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^0}{dz^0} \left\{ (z-0.5)^2 \frac{X(z)}{z} \right\} \Big|_{z=0.5} \\ &= \frac{z}{z-1} \Big|_{z=0.5} = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Then } X(z) = \frac{4z}{z-1} + \frac{-4z}{z-0.5} + \frac{-1z}{(z-0.5)^2}. \quad (5.9)$$

The inverse z -transform for each term on the right-hand side of Equation (5.9) can be achieved by the result listed in Table 5.1, that is,

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} = u(n),$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-0.5} \right\} = (0.5)^n u(n),$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-0.5)^2} \right\} = 2n(0.5)^n u(n).$$

From these results, it follows that

$$x(n) = 4u(n) - 4(0.5)^n u(n) - 2n(0.5)^n u(n).$$

$$4. X(z) = \frac{1}{6-5z^{-1}+z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{z^2}{6z^2-5z+1} = \frac{z^2}{6(z-1/2)(z-1/3)}$$

$$X(z) = \frac{z}{6} \left(\frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{z-1/3} \right)$$

$$A = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{z}{z-1/3} = 3$$

$$B = \lim_{z \rightarrow 1/3} \frac{z}{z-1/2} = -2$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z-1/2} - \frac{1}{3} \frac{z}{z-1/3}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u(n) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n)$$

5. $X(z) = \frac{z}{[(z-1)^2(z-2)]}$ avec $|z| > 2$

La décomposition en éléments simples, on écrit $\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-2)}$;

$$A = \lim_{n \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{X(z)}{z} = -1, B = A = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{d}{dz} ((z-1)^2 \frac{X(z)}{z}) = -1, C = \lim_{n \rightarrow 1} (z-2) \frac{X(z)}{z} = 1$$

$$\text{D'où : } \frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{-1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)} \Rightarrow X(z) = \frac{-z}{(z-1)^2} + \frac{-z}{(z-1)} + \frac{z}{(z-2)}$$

$$\text{Donc } x(n) = -nu(n) - u(n) + (2)^n u(n) = (-n - (2)^n + 1)u(n)$$

2/FILTRES NUMERIQUES

Exercice 01 :

Un système est défini par la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.4z^{-1})}$$

1. Est-ce que $H(z)$ est stable ?
2. Donner les coefficients du filtre (a, b) .
3. Donner l'équation aux différences.

Solution

1. On cherche sur les pôles :

$$(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.4z^{-1}) = 0 \Rightarrow (1 + 0.5z^{-1} = 0) \text{ où } (1 - 0.4z^{-1} = 0) \Rightarrow z_1 = -0.5 \text{ où } z_2 = 0.4$$

\Rightarrow Le filtre est stable presque $|z_1|$ et $|z_2| \leq 1$

2. Les coefficients du filtres (a,b) sont :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{y(z)}{x(z)} ; B(z) = (1 + z^{-1}) \Rightarrow b = [1, 1] ;$$

$$A(z) = (1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.4z^{-1}) = (1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}) \Rightarrow a = [1, 0.1, -0.2]$$

3. L'équation aux différences :

$$x(n) + x(n-1) = y(n) + 0.1y(n-1) - 0.2y(n-2)$$

Exercice 02 :

Soit le filtre suivant :

$$H(z) = 0.1(z^{-1} + z^{-3}) + 0.2z^{-2}$$

Te la période d'échantillonnage $T_e = 1\text{ms}$

1. Donner et tracez sa réponse impulsionnelle $h(n)$
2. Calculer la réponse fréquence, le module et la phase.
3. Donner sa fréquence de coupure à -3dB.
4. Donner l'expression de la $y(n)$ en fonction de $x(n)$

Solution

1. Le filtre est stable, pas de pôles.

2. $h(n) = 0.1[\delta(n-1) + \delta(n-3)] + 0.2\delta(n-2)$: RIF symétrique

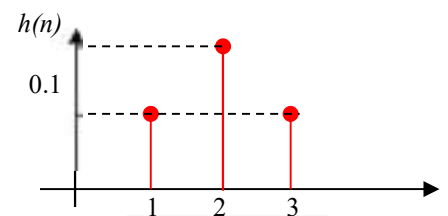
3.

$$H(\Omega) = 0.2.e^{-2j\Omega}[1 + \cos\Omega]$$

$$|H(\Omega)| = 0.2(1 + \cos\Omega)$$

$$\text{Arg}[H(\Omega)] = -2\Omega \Rightarrow \text{phase linéaire}$$

$$f_c = 182\text{Hz}$$



4. Filtre RIF, la sortie dépend seulement d'entrées.
5. $y(n) = 0.1x(n-1) + 0.2x(n-2) + 0.1x(n-3)$

Exercice 03 :

Un filtre numérique décrit par l'équation aux différences :

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$

1. Déterminer la fonction de transfert $H(z)$ ainsi que la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre.
2. Préciser le type de ce filtre.
3. Déterminer la réponse fréquentielle, le module et la phase.

Solution

1. De l'équation aux différences $y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$

On en déduit Fonction de transfert : $Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{1}{2}X(z)z^{-1} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$

La réponse impulsionnelle : $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-1)$

2. C'est un filtre RIF presque la sortie dépend seulement que des entrées (la réponse est bien finie).

On $\sum_n h(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ qui est bien limité d'où la stabilité du système.

3. Réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$:

$$H(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$$

On remplace $z = e^{j\Omega}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2}(1 - e^{-j\Omega}) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(\frac{e^{+j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2} \right) = e^{-j\frac{\Omega}{2}} \left(j \sin \frac{\Omega}{2} \right) \Rightarrow e^{-j\frac{\Omega}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\Omega}{2} \\ &= e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2})} \sin \frac{\Omega}{2} \end{aligned}$$

Alors Le module : $|H(e^{j\Omega})| = \sin \frac{\Omega}{2}$ et la phase : $\frac{\pi}{2} - \frac{\Omega}{2}$

Exercice 04 :

Considérons la fonction de transfert en z suivante :

$$H(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

1. Trouver les pôles et les zéros de $H(z)$ et les représenter dans le plan complexe.
2. Décomposer $H(z)$ en éléments simples et déterminer $h[k]$, l'inverse causale de $H(z)$
3. Etudier la stabilité du système.

Solution

1. Les pôles et les zéros de $H(z)$:

2 zéros : $z = 5/18$ et $z = 0$

2 pôles : $p = 1/4$ et $z = 1/3$

2. Décomposer $H(z)$ en éléments simples et déterminer $h[k]$, l'inverse causale de $H(z)$

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Par identification :

$$h[k] = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^k + 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \right) \mathcal{U}[k]$$

3. Etude de la stabilité

Sur le domaine causal, i.e., $|z| > 1/3$, le système est stable car le cercle unité appartient au domaine de convergence. Ailleurs (domaine anti-causal...) le système est instable.

Exercice 05 :

Soit un filtre numérique défini par sa réponse en fréquence :

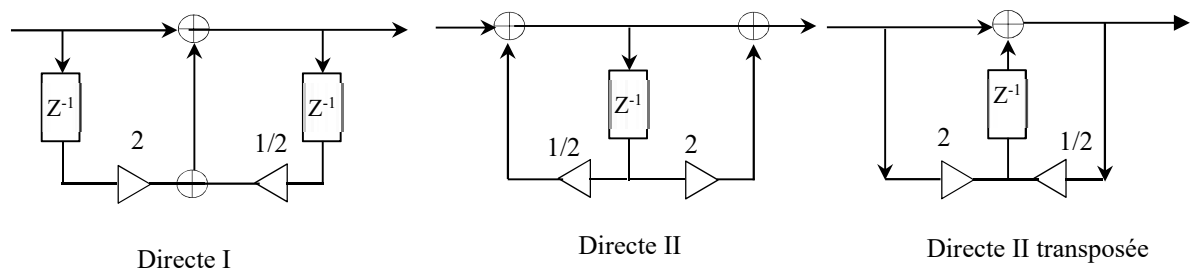
$$H(j\Omega) = \frac{1 + 2e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

1. Donner sa fonction de transfert $H(z)$.
2. Ce système est-il stable ? et pourquoi ?
3. Donner son équation de récurrence.
4. Dessiner les structures direct I, direct II et direct II transposé pour ce filtre.
5. Donner l'expression analytique de la réponse impulsionnelle de ce filtre $h(n)$.

Solution

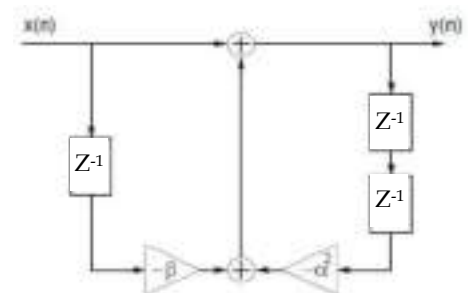
1. La fonction de transfert : $H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$
2. $(1 - 0.5z^{-1}) = 0 \Rightarrow (z^{-1} = 2) \Rightarrow z = 0.5 \Rightarrow$ Le filtre est stable presque $|z| < 1$
3. L'équation aux différences : $y(n) = x(n) + 2x(n-1] + 0.5y(n-1]$
4. Les structures :
5. la réponse impulsionnelle du filtre $h(n)$

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1]$$



Exercice 05 :

- 1) Donner l'équation aux différences et la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique représenté par la figure ci-contre.
- 2) Déterminer les pôles et les zéros du filtre. A quelle condition celui-ci est-il stable ?
- 3) Tracer le diagramme pôles-zéros de ce filtre dans le cas où $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1$. En déduire l'allure de sa réponse fréquentielle.



Solution

1). L'équation aux différences : $y(n) = x(n) - \beta x(n-1) - \alpha^2 y(n-2)$

La fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1 - \beta z^{-1}}{1 + \alpha^2 z^{-2}}$$

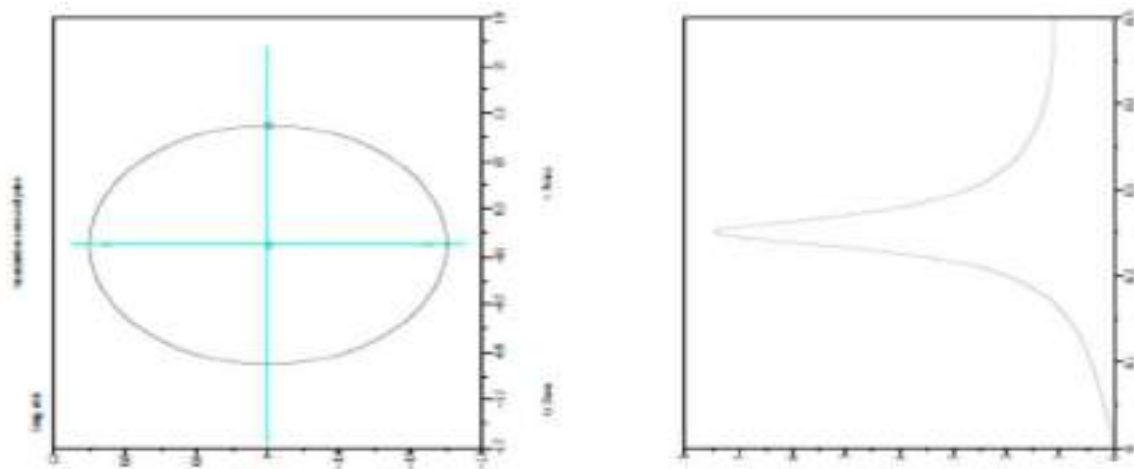
Le type de filtre est RII

2).

$$H(z) = \frac{z \cdot (z - \beta)}{z^2 + \alpha^2}$$

Pôles = $\mp j\alpha$; zéros = 0 et β , Stabilité ssi $\alpha < 1$

3). Le diagramme pôles-zéros de ce filtre dans le cas où $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1$.

**Exercice 06 : (Synthèse d'un filtre RIF: méthode du fenêtrage)**

1- Montrer que la réponse impulsionnelle $h(n)$ d'un filtre passe-haut idéal de fréquence de coupure normalisée $\omega_c = 1/4$ (voir figure 3) peut s'exprimer :

$$h(n) = \begin{cases} -\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} & \forall n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

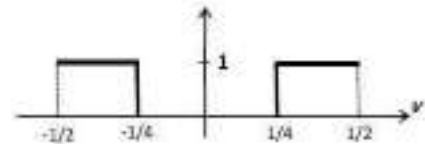


Fig. 3 : Réponse fréquentielle idéale.

Ce filtre est-il réalisable sous forme d'un filtre RIF ?

2- On cherche à approcher ce filtre idéal par un filtre RIF causal à phase linéaire, de longueur N la plus petite possible, par la méthode du fenêtrage. Ce filtre doit respecter le gabarit fréquentiel de la figure 4 : bande de transition de $1/10$; atténuation de la bande basse supérieure à 30 dB. Comment s'y prendre ?

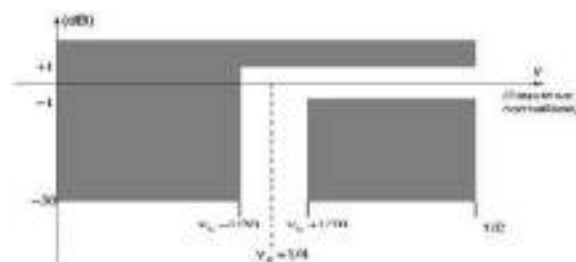


Fig. 4 : Gabarit du filtre passe-haut.

3- On remplace le fenêtrage précédent par un fenêtrage rectangulaire symétrique sur 11 points.

- Calculer les coefficients du filtre ainsi synthétisé.
- Dessiner la structure de ce filtre.
- Dessiner le gabarit dans lequel s'inscrit sa réponse fréquentielle, en précisant la largeur de la bande de transition et l'atténuation de la bande basse.
- Montrer que si l'on met en cascade (l'un à la suite de l'autre) deux filtres comme celui-ci, le système ainsi constitué respecte le gabarit de la question 2.

Solution

1- La réponse en fréquence idéale d'un filtre passe-haut est périodique, donc décomposable en série de Fourier. Sa transformée inverse n'est autre que sa réponse impulsionnelle :

D'après la figure 3,

$$h(n) = \text{TFD}^{-1}(H(f/L_s)), \quad h(n) = \int_{-1/2}^{-1/4} H\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{j2\pi n f} df + \int_{1/4}^{1/2} H\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{j2\pi n f} df$$

$$\text{pour } n = 0, h(0) = \int_{-1/2}^{-1/4} 1 df + \int_{1/4}^{1/2} 1 df = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{pour } n \neq 0 \quad h(n) = \int_{-1/2}^{-1/4} 1 \cdot e^{j2\pi n f} df + \int_{1/4}^{1/2} 1 \cdot e^{j2\pi n f} df$$

$$\begin{aligned} \text{pour } n \neq 0 \quad h(n) &= \frac{1}{j2\pi n} e^{j2\pi n f} \Big|_{-1/2}^{-1/4} + \frac{1}{j2\pi n} e^{j2\pi n f} \Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{j2\pi n} \left(e^{-\frac{jn\pi}{2}} - e^{-jn\pi} + e^{jn\pi} - e^{\frac{jn\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{j2\pi n} (2j \left(\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)) = -\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi n} \end{aligned}$$

Ce filtre n'est pas réalisable sous forme d'un filtre RIF, puisque $h(n)$ est infinie et non causale

2- Fenêtrage symétrique. Fenêtre de Hamming ou Hanning pour respecter les spécifications en amplitude avec le minimum de coefficients. Calcul de la longueur N :

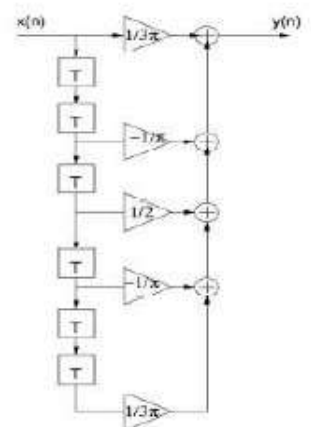
bande de transition = $\Delta\nu = 2 = 2/N \leq 1 = 10$: Donc $N \geq 20$ donc $N = 21$.

3- $h(0) = 1/2$; $h(1) = h(-1) = -1/\pi$; $h(2) = h(-2) = 0$; $h(3) = h(-3) = 1/3\pi$; $h(4) = h(-4) = 0$.

On décale de 4 échantillons cette réponse impulsionnelle pour faire un filtre RIF causal.

Gabarit : comme celui de la figure 4, avec une atténuation de -21 dB pour la bande basse, et une bande de transition de 1/11. Si l'on met en cascade 2 filtres comme celui-ci, la bande de transition reste la même et l'atténuation en dB est doublée, passant à -42. On respecte donc bien le gabarit initial.

Intérêt : structure moins sensible aux erreurs de quantification des échantillons et des coefficients.



Exercice 07 : (Synthèse d'un filtre RIF : méthode de l'échantillonnage fréquentiel)

On désire réaliser un filtre dérivateur à Réponse Impulsionnelle Finie ayant une caractéristique en phase linéaire par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel sur N points. La réponse fréquentielle entre $-\pi$ et π du filtre idéal est donc définie par :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} j \frac{\Omega}{\Omega_c} & \text{pour } -\Omega_c \leq \Omega \leq \Omega_c \\ 0 & \text{pour } \Omega_c < \Omega \leq \pi \text{ et } -\pi \leq \Omega < -\Omega_c \end{cases}$$

On fixe $\Omega_c = \frac{4\pi}{N}$

1. Dessiner le pseudo-module $A(\Omega)$ et la phase $\phi(\Omega)$ de la réponse fréquentielle pour $-2\pi \leq \Omega \leq 2\pi$.
2. Donner le type de réponse impulsionnelle issu de la classification vue en cours pouvant réaliser au mieux ce filtre RIF à phase linéaire.
3. On échantillonne le filtre idéal à $\Omega_e = \Omega_c/2$ pour $0 \leq k\Omega_e < 2\pi$.
 - Représenter la réponse fréquentielle du filtre échantillonné $H_a(k\Omega_e)$.
 - Exprimer la réponse impulsionnelle $h_a(n)$ en fonction de N .
 - Calculez et dessinez $h_a(n)$ pour le cas particulier où $N = 7$.
4. Donner l'expression de l'équation aux différences du filtre. En déduire la fonction de transfert $H_a(z)$ du filtre obtenu.
5. Donner une deuxième version de $H_a(z)$ directement déduite de $H_a(k\Omega_e)$ sous forme de cellules du second ordre en parallèle réelles.
6. Montrer que les deux versions du 4. et du 5. sont équivalentes.

A votre avis quels sont les problèmes sur la réponse fréquentielle de ce filtre. Donner une nouvelle version du filtre $h_b(n)$ déduite du filtre $h_a(n)$ dont le comportement en fréquence serait optimisé.

Solution :

On désire réaliser un filtre dérivateur à Réponse Impulsionnelle Finie ayant une caractéristique en phase linéaire par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel sur N points.

On fixe $\Omega_c = \frac{4\pi}{N}$

1. $A(\Omega_c) = \frac{\Omega}{\Omega_c}$ entre $-\Omega_c$ et Ω_c . La phase $\phi(\Omega)$ est constante entre $-\Omega_c$ et Ω_c et vaut $\pi/2$ (voir figure 1)

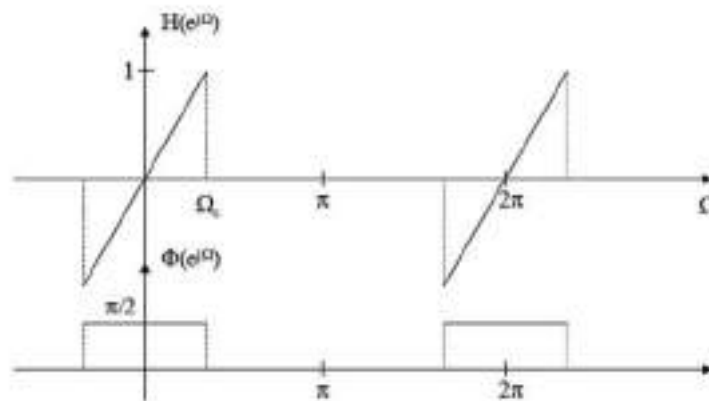


Figure 1 : Pseudo module et phase du dérivateur

2. Le type de réponse permettant de réaliser au mieux ce filtre RIF à phase linéaire est le type III (réponse impulsionnelle antisymétrique et N impair). Cela implique deux zéros en $\Omega = 0$ et $\Omega = \pi$.
3. On échantillonne le filtre idéal à $\Omega_c = \Omega_c/2$ pour $0 \leq k\Omega_c < 2\pi$.
 - La réponse fréquentielle du filtre échantillonné $H_a(k\Omega_c)$ est donnée figure 1.

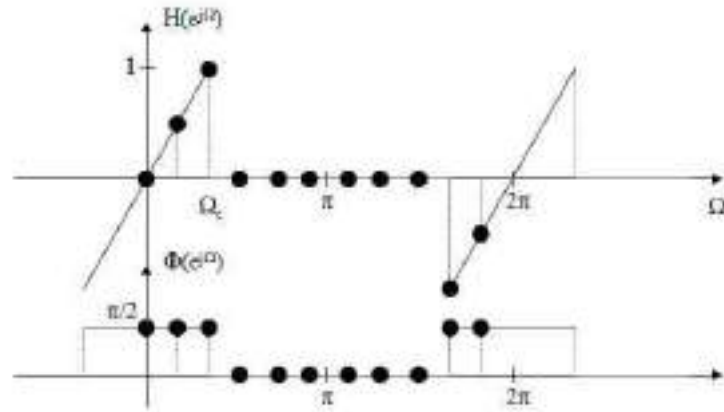


Figure 2 : Pseudo module et phase du dérivateur échantillonné

– Calcul de $h_a(n)$ pour $n = 0 \dots N-1$:

$$\begin{aligned}
 h_a(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k\Omega_c) e^{j2\pi k n / N} \\
 h_a(n) &= j \frac{1}{N} [0.5 e^{j2\pi n / N} + e^{j4\pi n / N} - e^{j2\pi (N-2)n / N} - 0.5 e^{j2\pi (N-1)n / N}] \\
 h_a(n) &= j \frac{1}{N} [0.5 e^{j2\pi n / N} + e^{j4\pi n / N} - e^{-j2\pi 4n / N} - 0.5 e^{-j2\pi n / N}] \\
 h_a(n) &= j \frac{1}{N} [j \sin(2\pi n / N) + j \sin(4\pi n / N)] \\
 h_a(n) &= -\frac{1}{N} [\sin(2\pi n / N) + \sin(4\pi n / N)]
 \end{aligned}$$

– Pour $N = 7$: $h_a(n) = -\frac{1}{7} [\sin(2\pi n / 7) + \sin(4\pi n / 7)]$ pour $n = 0 \dots 6$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$h_a(n)$	0	-0.39	-0.0153	0.1614	-0.1614	0.0153	0.39	0

4. Equation aux différences du filtre et fonction de transfert en z :

$$\begin{aligned}
 y(n) &= -0.39x(n-1) - 0.0153x(n-2) + 0.1614x(n-3) \\
 &\quad - 0.1614x(n-4) + 0.0153x(n-5) + 0.39x(n-6) \\
 H_a(z) &= -0.39(z^{-1} - z^{-6}) - 0.0153(z^{-2} - z^{-5}) + 0.1614(z^{-3} - z^{-4})
 \end{aligned}$$

5. On peut également déduire $H_a(z)$ directement de $H_a(k\Omega_c)$ sous forme de cellules du second ordre en parallèle réelles en utilisant la formule vue en cours.

$$\begin{aligned}
 H_a(z) &= \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k\Omega_c)}{1-z^{-1} \cdot e^{j2\pi k / N}} \\
 H_a(z) &= \frac{1-z^{-N}}{N} \left[\frac{0.5}{1-z^{-1} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}}} + \frac{1}{1-z^{-1} \cdot e^{j\frac{4\pi}{N}}} - \frac{1}{1-z^{-1} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{N}}} - \frac{0.5}{1-z^{-1} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \right] \\
 H_a(z) &= \frac{1-z^{-N}}{N} \left[\frac{-z^{-1} \sin(2\pi/N)}{1-2\cos(2\pi/N)z^{-1}+z^{-2}} + \frac{-2z^{-1} \sin(4\pi/N)}{1-2\cos(4\pi/N)z^{-1}+z^{-2}} \right] \\
 H_a(z) &= (1-z^{-7}) \left[\frac{-0.11z^{-1}}{1-1.247z^{-1}+z^{-2}} + \frac{-0.28z^{-1}}{1-0.445z^{-1}+z^{-2}} \right]
 \end{aligned}$$

6. Montrer que les deux versions du 4. et du 5. sont équivalentes : il suffit de réduire au même dénominateur la formule précédente, puis de faire une division polynomiale.

7. Les problèmes sur le filtre (module de $H_a(\Omega_c)$ très différent d'un dérivateur) viennent de la contrainte sur la phase qui a été implicitement posée. En effet, la spécification impose une phase nulle. D'autre part, on a ici $N = 7$ alors que le centre de symétrie est placé en 3.5, différent du $\alpha = \frac{N-1}{2}$. Il faut donc utiliser un filtre à phase linéaire $h_b(n)$. Pour cela, nous devons décaler $h_a(n)$ de $\alpha = 3$: $h_b(n) = h_a(n-3)$. Dans ce cas le filtre se comporte beaucoup mieux en fréquence.

Exercice 05 : (Synthèse d'un filtre RII Passe-bas)

En utilisant la méthode de l'invariance impulsionnelle puis la transformation bilinéaire, déterminer l'algorithme du filtre numérique passe-bas équivalent à un filtre analogique de Butterworth ($f_c = 100$ Hz, $f_e = 1$ kHz, atténuation de 10dB en bande coupée, largeur de la bande de transition $2.f_c$). Vérifier la nature du filtre dans les deux cas. Etudier et comparer les réponses fréquentielles.

Solution :

La synthèse de filtre RII est une méthode de synthèse numérique qui utilise la synthèse analogique. Cette synthèse analogique a besoin en entrée d'un gabarit analogique à respecter pour retourner la fonction de transfert $H(p)$ d'un filtre respectant ce gabarit. On passera donc dans un premier temps du gabarit numérique $H(f_d/f_e)$ au gabarit d'entrée de la synthèse analogique $H(f_a)$. Les atténuations du gabarit numérique restent identiques à celle du gabarit numérique mais l'axe de fréquence doit subir la prédistorsion suivante : $f_a = (1/\pi T_e) \tan(\pi f_d/f_e)$ avec f_d fréquence numérique et f_a fréquence analogique.

On choisit d'utiliser ici le modèle passe-bas de Butterworth, dont la fonction de transfert est donnée par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Où ω_c représente la pulsation de coupure. L'atténuation pour $\omega = \omega_c = 2\pi f_c$ est fixée à -3dB.

Le paramètre N va permettre de satisfaire à l'atténuation en début de bande coupée. On souhaite :

$$10 \log_{10} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_a}{\omega_c}\right)^{2N}} \leq -10 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{1}{10}$$

$$\text{On a } \frac{\omega_a}{\omega_c} = 2, \text{ donc après simplification on trouve que } N \geq \frac{10 \log_{10} 9}{2 \log_{10} 2} = 1.585$$

Donc $N=2$.

On passe maintenant de $H(\omega)$ à $H(p)$: $|H(\omega)|^2 = [|H(p)|^2]_{p=j\omega}$

$$H(p) = \frac{\omega_c^2}{p^2 + \sqrt{2}\omega_c p + \omega_c^2}$$

D'où

$$h(t) = \sqrt{2} \cdot \omega_c e^{-\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} t} \cdot \sin\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} t\right) \cdot U(t)$$

Méthode de l'invariance de la RI :

$$h[n] = \sqrt{2} \cdot \omega_c e^{-\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} n T_e} \cdot \sin\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} n T_e\right) \cdot U(n T_e)$$

D'où

$$H_{IR}[Z] = \sqrt{2} \cdot \omega_c \frac{e^{-\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} T_e} \cdot \sin\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} T_e\right) \cdot Z^{-1}}{1 - 2 \cdot e^{-\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} T_e} \cdot \cos\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2}} T_e\right) \cdot Z^{-1} + e^{-2 \frac{\omega_c}{\sqrt{2}} T_e} \cdot Z^{-2}}$$

$$\text{AN : } H_{IR}[Z] = \frac{0.245 \cdot Z^{-1}}{1 - 1.16 \cdot Z^{-1} + 0.411 \cdot Z^{-2}}$$

Méthode de la transformation bilinéaire :

$$p = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

D'où

$$H_{TBL}[Z] = \frac{0.064 + 0.128 Z^{-1} + 0.064 Z^{-2}}{1 - 1.17 Z^{-1} + 0.424 Z^{-2}}$$

Chapitre 2

Signaux aléatoires et Processus stochastiques

2.1. Introduction

Le mot « *signal* » désigne l'évolution temporelle d'une grandeur physique mesurable (courant, tension, force, température, pression, etc.). Ces signaux physiques sont modélisés par des fonctions mathématiques X dépendant d'une variable représentant le temps t . Un signal est dit *déterministe* si son évolution peut être prédite en utilisant un modèle mathématique. C'est le cas de la tension électrique aux bornes d'une alimentation qui peut s'écrire $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. Si A et f_0 sont connus, on peut déterminer la valeur de l'amplitude à n'importe quel instant. Il n'en est plus de même pour un signal tel que celui observé à la sortie d'un microphone. Il semble que tout effort pour écrire l'équation d'un tel signal, même avec un très grand nombre de paramètres, soit voué à l'échec. Par contre on imagine assez bien que, faute de pouvoir donner la valeur du signal à un instant t , il soit possible de préciser une distribution de valeurs possibles. D'où l'idée d'utiliser des variables aléatoires pour décrire le phénomène à tout instant. Par définition, un signal *aléatoire* ne peut pas être décrit par une loi mathématique qui prédit sa valeur à chaque instant, car cette valeur n'est pas prédictible analytiquement. En revanche, on peut décrire ses propriétés à l'aide de probabilités et de statistiques.

2.2. Définition

Un **processus aléatoire** (ou stochastique) $X(t, \omega)$ est une famille de fonction $X(t)$, réelles ou complexes, définies dans un espace de probabilité Ω , c'est-à-dire dépendant de deux variables, l'une est le temps t , l'autre est la variable ω définissant le hasard. Selon que les variables sont continues ou discrètes, on parle de processus aléatoires continus $X(t, \omega)$ ou discrets $X(n, \omega)$.

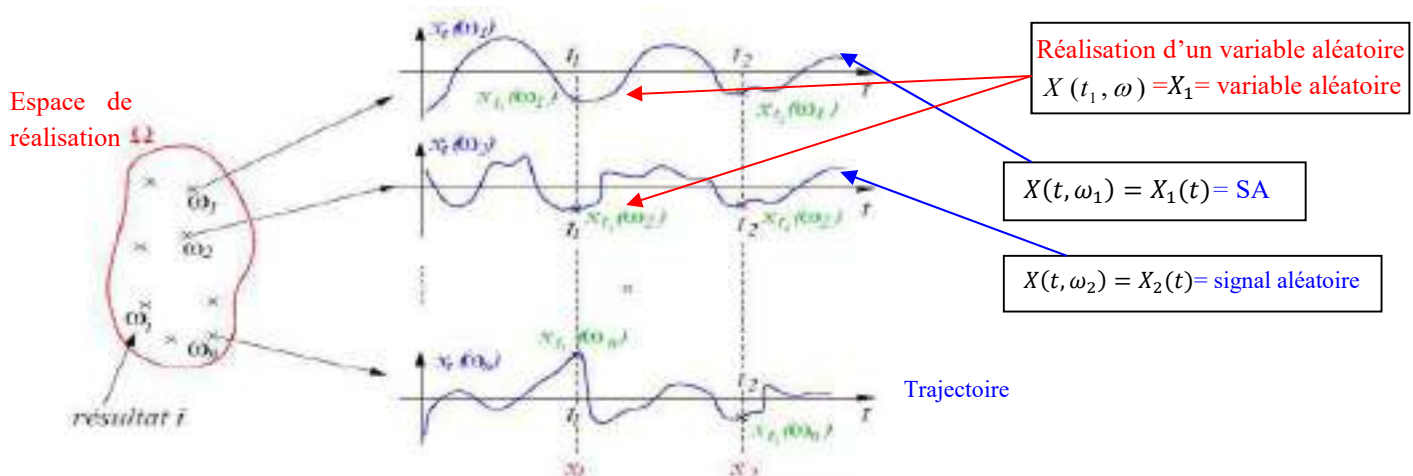


Figure 2.1. Processus aléatoire et signaux et variables aléatoires.

On la note en générale $X = \{X_t(\omega)\}$ où ω est l'épreuve associé à la réalisation $X_t(\omega)$ de la variable aléatoire X_t .

- ✎ Pour chaque t , $X_t(\cdot)$ est une **variable aléatoire** égale à l'état du processus considéré à l'instant t (t est fixe, ω est variable).
- ✎ Pour ω fixé, $X_t(\cdot)$ est un **signal aléatoire (réalisation)** qui est un fonction du temps.
- ✎ Pour t et ω fixé, $X_t(\omega)$ est un **nombre** (t est fixe, ω est fixe).
- ✎ $X(t, \omega)$ est processus aléatoire (t est variable, ω est variable).

2.3. Signaux aléatoires

Pour une réalisation ω_i donnée, le processus aléatoire $X(t, \omega)$ se réduit à une fonction $x(t, \omega_i)$ que l'on notera simplement $x_i(t)$, c'est **un signal aléatoire**. Le signal de parole, le signal de radar, les signaux de sismiques, l'électrocardiogramme en sont des exemples.

2.4. Variables aléatoires

A chaque instant t_i , le processus aléatoire $X(t, \omega)$ se réduit à une variable aléatoire $X(t_i, \omega)$ notée $X(t_i)$ ou simplement X_i , dont le comportement nécessite la connaissance de sa fonction de répartition :

En discrète : $F_{X_i}(x) = F_X(x, t_i) = \text{prob}(X_i \leq x)$ En continue : $F(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$

ou de sa densité de probabilité (loi d'évolution):

$$p_{X_i}(x) = p_X(x, t_i) = \frac{dF_{X_i}(x)}{dx} \quad (2.1)$$

2.4.1. Moments d'une variable aléatoire

Pour caractériser complètement une VA, nous devons connaître sa fonction de densité de probabilité. Cette densité peut être caractérisée par quelques nombres appelés moments statistiques.

a) Moment du premier ordre : Espérance mathématique

La valeur espérée ou moyenne mathématique d'une VA est donnée par :

$$E[X] = m_x = \begin{cases} \sum_k x_k p_k & \text{cas } X \text{ discret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx & \text{cas } X \text{ continu} \end{cases} \quad (2.2)$$

b) Statistiques du second ordre

- **Puissance :** Le moment d'ordre 2 correspond à la puissance moyenne totale de la VA :

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_X(x) dx = \sigma_{eff}^2 \quad \text{cas continu} \quad (2.3)$$

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 p_X(x) \quad \text{cas discret} \quad (2.4)$$

- **Variance :** La variance d'une VA est le moment centré d'ordre 2. Elle est définie par :

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_x]^2 p_X(x) dx \quad \text{cas continu} \quad (2.5)$$

$$\text{Var}[X] = \sum_i [x_i - m_x]^2 p_X(x) \quad \text{cas discret} \quad (2.6)$$

La variance est le carré de l'écart-type σ_X et correspond à la puissance des fluctuations autour de la valeur moyenne :

$$\text{Var}[X] = \sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2 \quad (2.7)$$

- Covariance de deux variables aléatoires : La covariance entre deux variables aléatoires est :

$$\text{Cov}[x, y] = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \quad (2.8)$$

La covariance permet de mesurer la variation simultanée de deux variables aléatoires. Elle est nulle dans le cas où les deux variables sont indépendantes. Cela se traduit par le fait que :

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y] = m_X \cdot m_Y \quad (2.9)$$

- Corrélation de deux variables aléatoires : La corrélation entre deux variables aléatoires est exprimée par le moment du produit.

$$r(x, y) = E[XY] \quad (2.10)$$

Aussi, on définit le coefficient de corrélation entre deux variables X et Y par :

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (2.11)$$

2.4.2. Vecteurs aléatoires

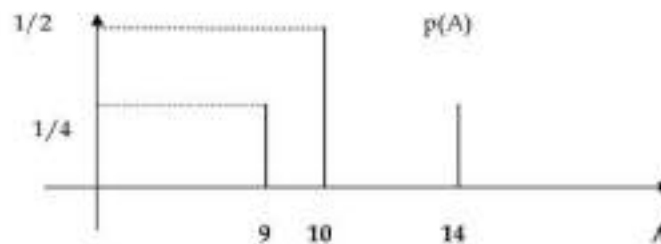
Soient les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_k associées aux instants t_1, t_2, \dots, t_k . Ces variables aléatoires forment un vecteur aléatoire $[X_1, X_2, \dots, X_k]^T$. Ce vecteur est caractérisé par sa fonction de répartition :

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_k) = \text{prob}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_k \leq x_k) \quad (2.12)$$

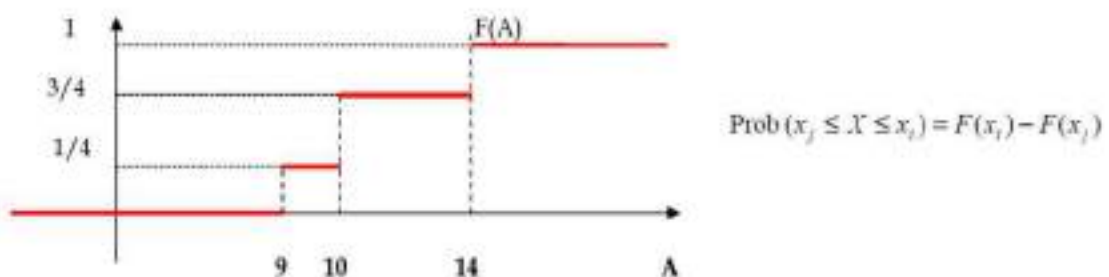
Exemple 1 : le jet de dé

Il y a six valeurs possibles $x_i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec $\text{prob}(x_i) = 1/6$ et $\sum_i \text{prob}(x_i) = 1$

Exemple 2 : soient 4 étudiants ayant obtenu les notes suivantes à l'examen : 10, 9, 10, 14 dans un module A. si on cherche la probabilité d'avoir chaque note on trouve : $\text{prob}(A=9)=1/4$, $\text{prob}(A=10)=1/2$, et $\text{prob}(A=14)=1/4$. On obtient le tracé suivant de $p(A)$.



Si on veut connaître la probabilité d'avoir une note inférieure ou égale à 10 (≤ 10), $p(A \leq 10) = 1/4 + 1/2 = 3/4$. Si on fait ce calcul pour toutes les valeurs A, on obtient la fonction de répartition $F(A)$:



2.4.3. Lois de probabilité de VA usuelles

1) **La loi normale** : La variable aléatoire associée X est dite **normale**, **gaussienne**, ou **normalement distribuée** si sa fonction densité de probabilité s'écrit :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.13)$$

Elle dépend de deux paramètres m et σ^2 qui sont, en fait, respectivement la moyenne et la variance de la variable aléatoire :

$$\begin{aligned} m &= E[x] \\ \text{var}(x) &= E[(x-m)^2] = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

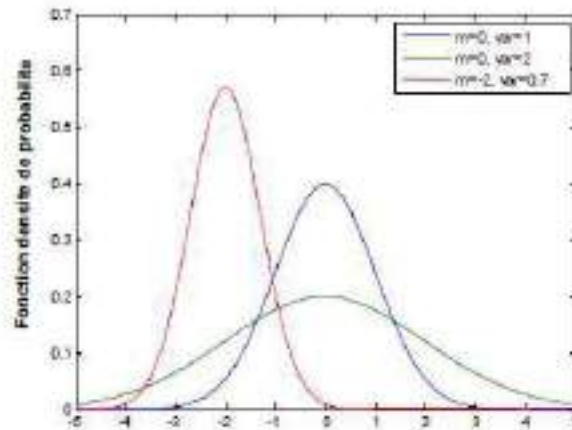


Figure 2.2. Loi normale.

2) **La loi Uniforme** : la variable aléatoire X est **uniformément répartie** entre a et b veut dire que la probabilité équiprobable quelque soit la valeur de x sur $[a, b]$:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.15)$$

La moyenne et la variance de la variable aléatoire sont :

$$\begin{aligned} m &= (b+a)/2 \\ \text{var}(x) &= (b-a)^2/12 = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

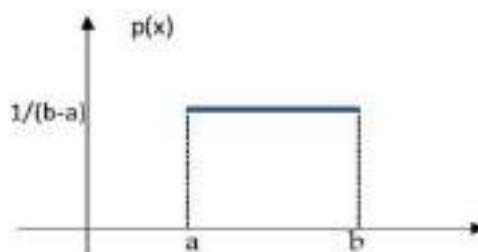


Figure 2.3. Loi Uniforme.

2.5. Processus aléatoires (PA)

Un processus aléatoire $X(t, \omega)$ est une famille de fonctions $X(t)$, réelles ou complexes, définies dans un espace de probabilité, c'est-à-dire dépendant de deux variables, l'une est le temps t , l'autre est la variable ω définissant le hasard.

2.5.1. Fonction de répartition et densité de probabilité

A chaque instant t_i , le processus aléatoire $X(t, \omega)$ se réduit à une variable aléatoire $X(t_i, \omega)$ notée $X(t_i)$ ou simplement X_i , dont le comportement nécessite la connaissance de sa fonction de répartition :

$$F_{X_i}(x) = F_X(x, t_i) = \text{prob}(X_i \leq x) \quad (2.17)$$

ou de sa densité de probabilité :

$$p_{X_i}(x) = p(x, t_i) = \frac{dF_{X_i}(x)}{dx} \quad (2.18)$$

La connaissance totale d'un processus aléatoire requiert la connaissance des densités de probabilités à chaque instant t .

2.5.2. Moments temporels d'un processus aléatoire

1. Moyenne temporelle : Elle est prise sur une réalisation x_i du processus aléatoire pour une durée d'observation qui tend vers l'infini.

$$\bar{x}_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t) dt \quad (2.19)$$

2. Autocorrélation temporelle

$$\bar{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_i(t) x_i^*(t - \tau) dt \quad (2.20)$$

2.5.3. Moments statistiques d'un processus aléatoire

1) Statistiques d'ordre 1 :

a) Moyenne statique : On appelle moyenne d'un processus aléatoire en temps continu $x(t)$, la fonction qui pour toute valeur de t , donne la moyenne de la variable aléatoire obtenue à cet instant, soit :

$$m_x(t) = \mu_x(t) = E[x(t_i)] = E[x_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x, t_i) dx \quad (2.21)$$

b) Variance : la variance est une mesure de la dispersion de la variable aléatoire autour de sa moyenne. Sa racine carrée est appelée *écart-type* (standard déviation).

$$\text{var}(x) = \sigma_x^2(t_i) = E[(x_i - E[x_i])^2] = E[x_i^2] - m_x^2(t_i) \quad (2.22)$$

Où $E[x_i^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x, t_i) dx$ est la valeur quadratique moyenne (la puissance) et $\sigma_x(t_i)$ est l'écart-type.

Exemple 1 : soit le processus stochastique $x(t)$ défini par : $x(t) = a + b \cdot t$ où a et b dont les probabilités sont connues, alors : $m_x(t) = E[a + bt_i] = m_a + m_b t$

Exemple 2 : soit un signal sinusoïdal à phase aléatoire $x(t, \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi)$ avec une phase φ uniformément répartie entre 0 et 2π . Calculer les moments statiques de ce signal.

Pour un instant donné t_k , on peut calculer des moments statistiques de la variable aléatoires $X(t_k, u)$

- Moyenne :

$$\mu_x(t) = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} f_{\varphi}(\varphi) a \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} a \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = 0$$

$$\mu_x(t) = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} a \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) d\varphi = 0$$

-Variance :

$$\sigma_x^2(t) = E[X^2(t)] - \mu_x^2(t) = E[X^2(t)] = \int_0^{2\pi} f_\varphi(\varphi) a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2}$$

Supposons, maintenant que φ est déterministe et que a est aléatoire de densité $p(a)$, de moyenne μ_a et de variance σ_a^2 , alors :

$$\mu_x(t) = E[a \cos(\omega t + \varphi)] = \mu_a \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \sigma_x^2(t) = \sigma_a^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

2) Statistiques d'ordre 2

Soient les deux variables aléatoires $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$ et la fonction de répartition :

$$F_X(x_1, x_2) = \text{prob}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \quad (2.23)$$

et la densité de probabilité :

$$p_X(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.24)$$

a) La fonction d'autocorrélation statistique :

On peut alors définir les différents moments du vecteur aléatoire $[X_1, X_2]^T$ par $E[X_1^m X_2^n]$, en particulier, pour comparer les variables aléatoires, on utilise la fonction d'autocorrélation statistique :

$$R_x(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.25)$$

b) La fonction d'autocovariance :

La fonction d'autocovariance est la fonction d'autocorrélation des variables centrées :

$$C_x(t_1, t_2) = E[(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2}) p_X(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.26)$$

En développant cette expression, on peut aboutir à :

$$C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) - m_{X_1} m_{X_2} \quad (2.27)$$

Notons que pour des processus centrés ($\mu_x(t)=0$) : $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$

On peut étendre ces notions pour mesurer ce lien entre deux processus aléatoires par :

- Fonction d'intercorrélation statistique : $R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) \cdot y^*(t_2)\} = E\{x_1 \cdot y_2^*\}$

- Fonction d'intercovariance statistique : $C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_y^*(t_2)$

- Le coefficient de corrélation est définie par : $\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{C_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_y(t_2)} \quad -1 \leq \rho_{xy}(t_1, t_2) \leq 1$

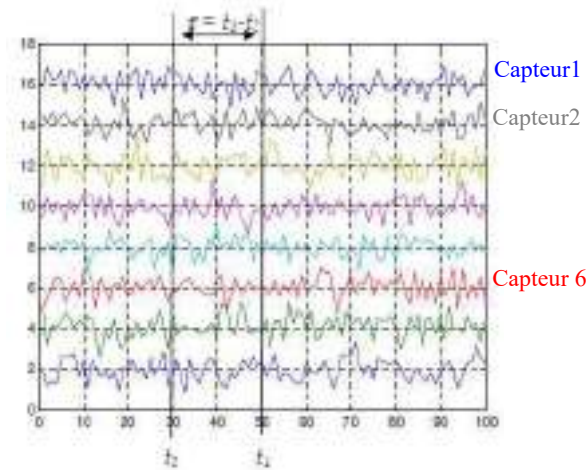
Exemple 3 :

Reprenons l'exemple 2 et calculons l'auto-correlation statistique :

$$\begin{aligned} R_{xx}(t_1, t_2) &= E[a \cos(\omega t_1 + \varphi) a \cos(\omega t_2 + \varphi)] = E\left[\frac{a^2}{2} (\cos(\omega(t_1 + t_2) + 2\varphi) + \cos(\omega(t_1 - t_2)))\right] \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(\omega(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

On remarque que c'est une fonction périodique, ne dépendant que de l'écart $t_1 - t_2$. Pour $t_1 = t_2$, on retrouve la variance du processus aléatoire soit $a^2/2$.

Elles illustrent la relation entre les statistiques prises à deux instants t_1 et t_2 différents. La fonction d'*autocorrélation* mesure la corrélation entre les signaux émis par un *même* processus à deux *instants différents*. Lorsqu'il y a corrélation on peut parler d'un « effet mémoire » du processus. On définit la mémoire du processus comme le temps t_c au-delà duquel la corrélation est négligeable, t_c est aussi appelé temps de corrélation. Par contre, si elle est nulle, le signal est complètement aléatoire et le signal $x(t)$ à l'instant t est complètement décorrélé de ce même signal à l'instant passé $t - \tau$.



2.5.4. Stationnarité et érgodicité

Ces propriétés sont très importantes pour interpréter, estimer et prédire les signaux aléatoires.

1. Stationnarité

Par convention, la notion de stationnarité est utilisée pour un phénomène dont les caractéristiques essentielles ne se modifient pas au cours du temps :

a) *Processus stationnaire au sens strict (SSS)* : Un processus aléatoire est dit *stationnaire au sens strict*, si toutes ses caractéristiques statistiques c'est-à-dire tous *ses moments à tout ordre* sont indépendants du temps.

$$\begin{aligned} p_{X_i}(x) &= p_{X_j}(x) = p_X(x), \quad \forall i, j \\ E[X_i] &= E[X] = \mu_X \\ E[X_i^2] &= E[X^2] = \sigma_X^2 \\ R_x(t_1, t_2) &= R_x(\tau), \quad c_x(t_1, t_2) = c_x(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

b) *Processus stationnaire au sens large (SSL)* : Un processus aléatoire est dit *stationnaire au sens large*, si toutes ses propriétés statistiques d'ordre 1 et 2 sont indépendantes du temps.

✎ Un processus stationnaire est dit *stationnaire d'ordre 1* si sa moyenne et sa variance sont constantes et donc indépendantes de tout décalage temporelle :

$$m_X(t) = m_X = E[X(t)] \quad \text{et} \quad \sigma_X^2(t_i) = \sigma_X^2 \quad (2.29)$$

✎ Un processus stationnaire est dit *stationnaire d'ordre 2* si ses statistiques d'ordre 2 ne dépendent que de l'écart temporel entre les deux instants t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= R_x(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1 \\ \text{Si } X(t) \text{ centré : } R_x(\tau) &= E[X(t)X(t + \tau)] \end{aligned} \quad (2.30)$$

2. Ergodicité :

L'ergodicité est une propriété très utile puisqu'elle permet d'estimer les propriétés statistiques d'un signal aléatoire (et son spectre de puissance) à partir des paramètres temporels par l'analyse d'une seule réalisation de ce signal.

Un processus aléatoire stationnaire est dit *ergodique* si les *valeurs moyennes statistiques* et les *valeurs moyennes temporelles* sont identiques.

a) **Ergodicité en moyenne** : Un processus aléatoire est dit à **moyenne ergodique**, si :

$$E[x] = m_x = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (2.31)$$

b) **Ergodicité en corrélation** : Un processus aléatoire est dit à **corrélation ergodique** si :

$$R_x(\tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \overline{R_x}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (2.32)$$

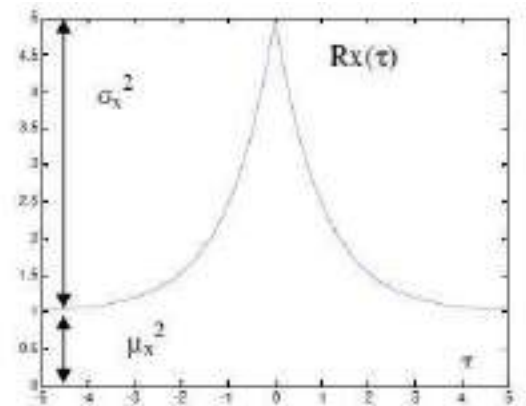
Remarque :

Un processus ergodique au sens large est stationnaire au sens large. L'inverse n'est pas vrai.

2.5.5. Propriétés de la fonction d'autocorrélation

Les propriétés de la fonction d'autocorrélation pour x aléatoire réel SSL sont :

- La fonction de corrélation est paire : $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ avec $\tau = t_2 - t_1$
- La fonction est maximum à l'origine $R_x(0) \geq |R_x(\tau)|$
- Valeurs à l'origine et à l'infini : $R_x(0) = E(x(t)^2) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$
et $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E\{x(t)x(t+\tau)\} = \mu_x^2$



En effet si $x(t)$ ne contient ni composante périodique ni composante indépendante du temps, lorsque $t \rightarrow \infty$, les variables $x(t)$ et $x(t + \tau)$ deviennent statistiquement décorréées.

2.5.6. Processus aléatoires à temps discret

Un processus aléatoire à temps discret $X(n)$ est une séquence de variables aléatoires définies pour tout entier n . La valeur moyenne, la fonction d'autocorrélation et la fonction d'autocovariance sont données par :

$$\begin{aligned} E[X(n)] &= m_x(n) \\ R_x(n_1, n_2) &= E[X(n_1)X(n_2)] \\ C_x(n_1, n_2) &= E\{[X(n_1) - m_x(n_1)][X(n_2) - m_x(n_2)]\} = R_x(n_1, n_2) - m_x(n_1)m_x(n_2) \end{aligned}$$

Si le processus $X(n)$ est stationnaire au sens large, alors la moyenne :

$$E[X(n)] = m_x = \text{const}$$

est indépendante de n , et la fonction d'autocorrélation :

$$R_x(n, n+k) = R_x(k) = C_x(k) + m_x^2$$

ne dépend que du décalage temporel entre n et $n+k$.

2.5.7. La fonction d'autocorrélation en discret

Cas discret : On remplacera t par n , un processus aléatoire X discret SSL possèdera une moyenne constante et une autocorrélation statistique ne dépendant que de $k=n_2-n_1$ soient :

$$\begin{aligned} \mu_x(n) &= \mu_x = \text{cste} \quad \text{et} \quad R_x(n_1, n_2) = R_x(k) \quad \text{avec} \quad k = n_2 - n_1 \\ R_x(n_1, n_2) &= \begin{bmatrix} R_x(1,1) & R_x(1,2) & \dots & R_x(1,N) \\ R_x(2,1) & R_x(2,2) & \dots & R_x(2,N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(N,1) & R_x(N,2) & \dots & R_x(N,N) \end{bmatrix} \Rightarrow R_x(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ainsi, la matrice de corrélation d'un processus stationnaire discret est une matrice *Toeplitz* carrée. Une matrice carrée est dite Toeplitz si tous les éléments d'une même diagonale ou sous-diagonale sont égaux. Cette propriété est directement liée à la propriété de stationnarité (au sens large) du processus.

2.6. Puissance

Les personnes qui conversent (dans un café ou en cours) génèrent un signal aléatoire qui selon son volume global possèdera une puissance. Si $x(t)$ est SSL, on peut calculer l'espérance de la puissance instantanée par :

$$P_x = E\{x(t)^2\} = R_x(0) = m_x^2 + \sigma_x^2 \quad (2.34)$$

L'énergie est alors donnée par : $E_x = \int P_x dt = \int E\{x(t)^2\} dt$

2.7. Densité Spectrale de puissance (Relation de Wiener-Kintchine) :

La densité spectrale de puissance (DSP) $S_x(f)$ d'un processus aléatoire fournit une idée sur la distribution de l'information contenue dans le domaine fréquentiel. Ainsi, la DSP correspond-elle à la répartition de la puissance moyenne du processus dans l'espace de fréquences. Pour un processus aléatoire stationnaire au sens large $x(t)$, la densité spectrale de puissance est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation et inversement :

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (2.35)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{2\pi j f \tau} df \quad (2.36)$$

La puissance moyenne totale du processus est :

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = R_x(0) \quad (2.37)$$

Les deux propriétés principales de la DSP suivent directement de celles de $R_x(\tau)$:

- $S_x(f) = S_x(-f)$: La DSP est une fonction paire ;
- $S_x(f) > 0$: La DSP est toujours positive.

2.8. Bruit blanc

Un bruit blanc $X(t)$ est un processus aléatoire stationnaire (SSL) généralement centré, dont la DSP $S_x(f)$ est constante sur tout l'axe des fréquences. Il est souvent utilisé pour modéliser entre autres certaines perturbations dans les canaux de transmission notamment sans fil, le bruit thermique dans les circuits électroniques, ...etc. Un bruit blanc est caractérisé aussi par :

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau) \quad (2.38)$$

Ce qui implique que sa moyenne sera nulle ($m_x = 0$) et qu'il est décorrélé.

La TF de la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ est, alors, donnée par :

$$S_x(f) = \sigma_x^2, \forall f \quad (2.39)$$

Où σ_x^2 sa variance. Sa puissance vaut :

$$P_x = R_x(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = +\infty \quad (2.40)$$

Alors, un bruit blanc est tout processus aléatoire stationnaire au sens large dont la DSP est uniformément distribuée sur $f =]-\infty, +\infty[$. S'il n'est pas à bande limitée sa puissance est infinie.

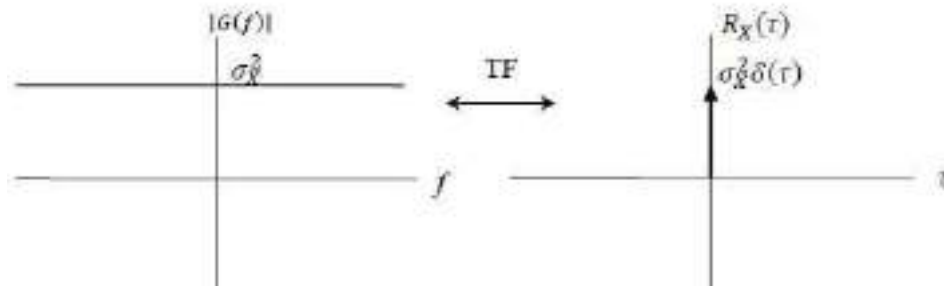
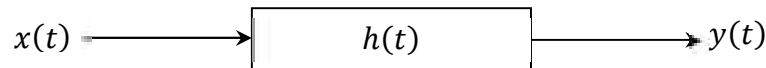


Figure 2.4. DSP et corrélation d'un bruit blanc

2.9. Filtrage linéaire des signaux aléatoires

Lorsqu'un signal passe dans un système linéaire et invariant dans le temps, on sait que le signal de sortie est donné par la convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du système. On peut généraliser ce résultat au cas d'un processus aléatoire entrant dans un système déterministe tel qu'un filtre. Soit un processus aléatoire appliqué à l'entrée d'un système (par exemple un filtre) de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de fonction de transfert $H(f)$.



$$\text{Alors } y(t) = h(t) * x(t) = \int x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

Sa implique que si $x(t)$ est un signal aléatoire, le signal en sortie $y(t)$ est forcément un signal aléatoire puisque la sortie est une somme pondérée de l'entrée. Il faut donc caractériser $y(t)$ de manière statique.

a) Moyenne :

$$E[Y(t)] = E[X(t) * h(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t - \tau)h(\tau)d\tau\right]$$

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t - \tau)]h(\tau)d\tau$$

Si le processus X est stationnaire on a : $E[X(t - \tau)] = E[X]$

$$\text{Ainsi : } E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)]h(\tau)d\tau = E[X(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau$$

avec : $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = H[0]$ c'est la valeur du spectre $H(f)$ pour $f=0$.

Enfin

$$E[Y(t)] = E[X(t)] \cdot H[0] \quad (2.41)$$

b) Corrélation :

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau) \quad (2.42)$$

c) Densité spectrale de puissance :

$$S_Y(f) = TF[R_Y(\tau)] = TF[R_X(\tau) * R_h(\tau)] = TF[R_X(\tau)] \times TF[R_h(\tau)]$$

$$TF[R_h(\tau)] = TF[h(\tau) * h^*(-\tau)] = |H(f)|^2$$

Enfin

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 \quad (2.43)$$

Exemple : Soit le processus stochastique $x(t)$ SSL de corrélation statistique : $R_\tau(x) = \sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}}$ et le système linéaire et invariant de réponse impulsionnelle $h(t) = 5e^{-2t}$. On obtient alors :

$$- \mu_y(t) = \mu_x H(0) = 0 \times \frac{5}{2 + 2\pi j f} \Big|_{f=0} = 0 \times 5/2 = 0$$

$$- S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \left| \frac{5}{2 + 2\pi j f} \right|^2 \cdot TF \left(\sigma^2 e^{-\frac{|\tau|}{\theta}} \right) = \frac{5}{4 + (4\pi^2 f^2)} \cdot \frac{2\sigma^2 \theta}{1 + 4\pi^2 f^2 \theta^2}$$

2.10. Estimation de la Densité Spectrale de Puissance (DSP)

L'analyse spectrale nous permet d'avoir une « estimation » du spectre de puissance d'un signal à partir d'un nombre fini d'observations. On s'intéresse essentiellement à l'estimation du contenu spectral de signaux aléatoires.

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) reflète la contribution de chaque fréquence à la puissance moyenne du signal. Elle est donnée par la TF de la fonction d'autocorrélation du signal :

$$S_x(f) = TF [R_x(\tau)] \quad (2.44)$$

On définit deux estimateurs numériques de base de la DSP, puis des variantes qui permettent de réduire la variance d'estimation.

2.10.1. Méthodes d'estimation spectrales classique

Ces méthodes sont des méthodes non paramétriques, c'est-à-dire ne reposant pas sur un modèle a priori du signal.

On considère un processus discret $x(n)$ aléatoire stationnaire et ergodique dont la fonction d'autocorrélation définie par :

$$R_{xx}(\tau) = E\{x^*(n)x(n+\tau)\} = R_{xx}^*(-\tau) \quad (2.45)$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ est densité spectrale de puissance (DSP) qui définit par :

$$S_x(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-2j\pi f \tau} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi f n} \right|^2 \right\} \quad (2.46)$$

On suppose disposer de N échantillons $x(n)$ ($n = 0, \dots, N-1$) du signal à analyser et on cherche donc à estimer la densité spectrale de puissance à partir de ces données. Il existe 2 grandes classes d'estimation non paramétrique du spectre, chacune étant liée à l'une des égalités dans l'équation précédente.

2.10.1.1. Principe de base, propriétés des estimateurs

✎ **Définition :** un estimateur est une fonction qui détermine une valeur $\hat{\alpha}$, estimation d'une grandeur α à partir d'un échantillon de réalisations de variables aléatoires $X(i)$. On note :

$$\hat{\alpha} = f(X(1), X(2), \dots, X(N)) \quad (2.47)$$

Soit α un paramètre caractérisant un processus stochastique et $\hat{\alpha}$ une estimation fondée sur la connaissance de N observations $X(i)$.

$$\hat{\alpha} = F(x(0), \dots, x(N-1)) \quad (2.48)$$

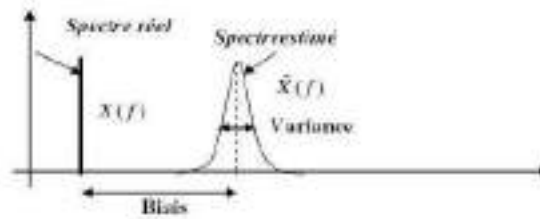
✎ **Biais d'un estimateur :** le biais d'un estimateur est la différence entre sa valeur moyenne et la vraie valeur que l'on veut estimer. On définit alors le biais d'un estimateur par la quantité :

$$B = \alpha - E[\hat{\alpha}] \quad (2.49)$$

🔗 **Variance d'un estimateur** : c'est la variance de la variable aléatoire qu'il représente :

$$\text{var}[\hat{a}] = \{(\hat{a} - E[\hat{a}])^2\} \quad (2.50)$$

🔗 **Estimateur consistant** : un estimateur est consistant ou converge lorsque le biais et la variance tendent vers zéro quand le nombre d'observations N tend vers l'infini ;



2.10.1.2. Périodogramme

C'est une méthode d'estimation directe de la densité spectrale de puissance (DSP) qui consiste à calculer par le module au carré de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné de durée finie $X(n)$ qui définit par :

$$\hat{S}_{PER}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2j\pi f n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(f)|^2 \quad (2.51)$$

Du fait de la troncature du signal, le périodogramme est en fait la convolution du spectre par une fenêtre en sinus cardinal. Le fait de tronquer le signal induit deux phénomènes principaux :

- 🔗 élargissement du lobe principal \Rightarrow perte de résolution
- 🔗 apparition de lobes secondaires.

On montre que la résolution du périodogramme est de l'ordre de $1/N$, c'est-à-dire que l'on peut discriminer deux fréquences distantes de $1/N$.

Pour remédier aux problèmes de troncature, on utilise en général des fenêtres permettant soit de réduire le lobe principal, soit d'atténuer les lobes secondaires.

On montre que le périodogramme est un estimateur biaisé :

$$E\{\hat{S}_{PER}(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} W_b(f-u) S_x(u) du \quad (2.52)$$

Où $W_b(f)$ est la TF de la fenêtre triangulaire de Bartlett. Le périodogramme est donc en moyenne la convolution du véritable spectre avec la TF de la fenêtre triangulaire. Néanmoins, lorsque $N \rightarrow \infty$, le biais devient nul. Le périodogramme est donc asymptotiquement non biaisé puisque la fenêtre converge vers une impulsion de Dirac quand N tend vers l'infini ($N \rightarrow \infty$) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{S}_{PER}(f)\} = S_x(f) \quad (2.53)$$

D'autre part, on montre que la variance de périodogramme ne diminue pas lorsque N tend vers l'infini ($N \rightarrow \infty$) et le périodogramme n'est pas un estimateur consistant du spectre. Ainsi, on montre que sa variance ne dépend pratiquement pas de N :

$$\text{Var}\{\hat{S}_{PER}(f)\} = S_x^2(f) \quad (2.54)$$

Le périodogramme est donc un mauvais estimateur de la densité spectral de puissance !

Le périodogramme présente très peu d'intérêt d'utilisation essentiellement à cause de sa variance qui ne diminue pas avec N , la longueur de la séquence de nos données. Bartlett en 1948 puis Welch en 1967 proposèrent des méthodes alternatives de calcul du périodogramme dans le but de réduire la variance. Malheureusement on réduit en même temps la résolution spectrale (donc le biais augmente).

2.10.1.3. Périodogramme moyenné (Bartlett)

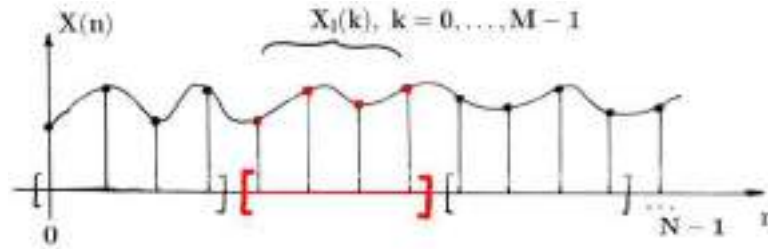
De fait de son inconsistance, en pratique : sa variance ne tend pas vers 0 quand N tend vers l'infinie. Une solution est périodogramme moyenné, permettant de réduire la variance du périodogramme. Pour calculer périodogramme moyenné, le séquence $x(n)$ de N points est subdivisé en M sous séquences de L échantillons chacun $x_l(k)$. On peut éventuellement introduire un recouvrement entre deux sous-signaux consécutifs. On calcule alors un périodogramme sur chaque sous-signal x_l puis on effectue la moyenne de ces L périodogrammes :

$$S_x(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ \frac{1}{M} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_l(k) e^{-j2\pi k} \right|^2 \right\} \quad (2.55)$$

Le moyennage permet de diminuer de la variance de l'estimation de la DSP :

$$Var \{P_{BAR}\} = Var \{\hat{S}_x(f)\} = \frac{S_x^2(f)}{L} \quad (2.56)$$

On remarque que le biais diminue quand L augmente mais la variance quant à elle diminue si M augmente.



2.10.1.4. Périodogramme lissé

Un autre moyen de diminuer la variance de l'estimateur spectral de base est de le filtrer :

$$\hat{S}_{x_{filtre}}(f) = TF\{\hat{R}_{xx}(n) \times w(n)\} = \sum_{n=-M}^M w(n) \cdot \hat{R}_{xx}(n) e^{-j2\pi f n} \quad (2.57)$$

où M est plus petit que N (nombre d'échantillons du signal à partir desquels la fonction d'autocorrélation est estimée) : typiquement $M=N/5$; $w(n)$ est appelée *fenêtre temporelle* de durée $2M+1$ et qui doit être symétrique et paire pour assurer de fournir une estimation de la densité spectrale de puissance qui soit paire et réelle. Le produit dans le domaine temporel correspond à une convolution fréquentielle :

$$\hat{S}_{x_{filtre}}(f) = \hat{S}_x(f) * W(f) \quad (2.58)$$

L'estimateur est donc forcément biaisé. On montre que sa variance est effectivement inférieure à celle du périodogramme.

2.10.1.5. Périodogramme de Welch

Cette méthode a été proposée par Peter D. Welch en 1967. Le principe de cette méthode d'estimation de spectre du périodogramme est le même que pour le périodogramme moyenné les différentes parties $x_l(k)$ sont autorisées à se recouvrir, ce qui réduit encore la variance d'estimation de la DSP pour une même résolution. Typiquement on laisse les fenêtres se recouvrir sur la moitié de leur longueur.

2.10.1.6. Corrélogramme (BLACKMAN-TUCKEY)

C'est une méthode d'estimation indirecte de la densité spectrale de puissance (DSP) qui consiste à calculer la transformée de Fourier d'une estimée de la fonction d'autocorrélation d'un signal échantillonné de durée finie $x(n)$ qui définit par :

$$\hat{S}_{COR}(f) = TF\{\hat{R}_{xx}(\tau)\} = \sum_{\tau=0}^{N-1} \hat{R}_{xx}(\tau) e^{-2j\pi f\tau} \quad (2.59)$$

Où $\hat{R}_{xx}(\tau)$ est un estimateur de la fonction d'autocorrélation donné par :

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|\tau|-1} x^*(n) x(n + \tau) \quad (2.60)$$

On montre que le corrélogramme est un estimateur consistant de la DSP. Ainsi, Le corrélogramme non biaisé peut, quant à lui, conduire à des valeurs négatives de la DSP.

SÉRIE DE TD N°02 :

Exercice 01 :

Soit $x(t)$ un processus stochastique continu donné par sa moyenne $m_x(t)$ et sa matrice de corrélation $R_x(t, \tau)$. Calculer la moyenne et la variance des v.a. $z = x(5)$ et $w = x(8)$ ainsi que la covariance.

Solution :

Soit $x(t)$ un processus stochastique continu donné par sa moyenne $m_x(t)$ et sa matrice de corrélation $R_x(t, \tau)$.

$$E[z] = E[x(5)] = m_x(5)$$

$$E[w] = E[x(8)] = m_x(8)$$

De même,

$$\text{var}(z) = E[x(5)^2] - m_x^2(5) = R_x(5, 5) - m_x^2(5)$$

$$\text{var}(w) = E[x(8)^2] - m_x^2(8) = R_x(8, 8) - m_x^2(8)$$

Finalement,

$$\text{cov}(z, w) = E[(x(5) - m_x(5))(x(8) - m_x(8))] = R_x(5, 8) - m_x(5)m_x(8)$$

Exercice 02 :

Soit le processus stochastique $x(t) = r \cos(\omega t + \varphi)$ où ω est une v.a. de densité de probabilité $p_\omega(\alpha)$ et φ est une v.a. uniformément distribuée sur $[-\pi, \pi]$, ω et φ sont indépendantes. r est une variable réelle. Calculer la moyenne et la corrélation de $x(t)$.

Solution :

La moyenne est donnée par :

$$m_x(t) = E[x(t)] = E[r \cos(\omega t + \varphi)] = rE[\cos(\omega t + \varphi)] = rE[\cos \omega t \cos \varphi] - rE[\sin \omega t \sin \varphi]$$

Comme les deux variables ω et φ sont indépendantes :

$$m_x(t) = rE[\cos \omega t]E[\cos \varphi] - rE[\sin \omega t]E[\sin \varphi]$$

Comme,

$$\begin{cases} E[\cos \varphi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \beta d\beta = 0 \\ E[\sin \varphi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \beta d\beta = 0 \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$m_x(t) = 0$$

La corrélation de $x(t)$ est définie par :

$$R_x(t, t + \tau) = E[r^2 \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega(t + \tau) + \varphi)]$$

Soit, par le même raisonnement,

$$R_x(t, t + \tau) = \frac{r^2}{2} E[\cos \omega \tau] + \frac{r^2}{2} E[\cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)] = \frac{r^2}{2} E[\cos \omega \tau]$$

Finalement, on obtient,

$$R_x(t, t + \tau) = \frac{r^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha \tau) p_\omega(\alpha) d\alpha$$

Exercice 03 :

Soit le processus stochastique $x(t) = r \cos(\omega t + \phi)$ où r est une v.a. ϕ et ω sont des variables réelles.

$x(t)$ est-il stationnaire au sens large ?

Solution :

La moyenne est donnée par :

$$E[x(t)] = \cos(\omega t + \phi) E[r]$$

Celle-ci n'est constante que si $E[r] = 0$. La corrélation peut s'écrire :

$$R_x(t, t + \tau) = E[x(t)x(t + \tau)] = \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega(t + \tau) + \phi) E[r^2]$$

On obtient finalement,

$$R_x(t, t + \tau) = \frac{E[r^2]}{2} [\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + 2\phi + \omega \tau)]$$

Cette dernière expression dépend explicitement de t et de τ . Le processus stochastique n'est donc pas SSL.

Exercice 04 :

Soit le processus stochastique $x(t) = r \cos(\omega t + \phi)$ où ϕ est une v.a. uniformément distribuée sur $[-\pi, \pi]$. r et ω des variables réelles.

- 1- Montrer que $x(t)$ est stationnaire au sens large.
- 2- Montrer que le processus est à moyenne et à corrélation ergodiques.

Solution :

1- On calcule la moyenne et la corrélation de $x(t)$. La moyenne est calculée par :

$$m_x(t) = E[x(t)] = E[r \cos(\omega t + \phi)] = r E[\cos(\omega t + \phi)]$$

La densité de probabilité de la v.a. ϕ est :

$$p_\phi(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \alpha \leq \pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On obtient donc,

$$m_x(t) = r \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \alpha) p_\phi(\alpha) d\alpha = \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \alpha) d\alpha = 0$$

La corrélation s'écrit :

$$R_x(t, t + \tau) = E[x(t)x(t + \tau)]$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} R_x(t, t + \tau) &= \frac{r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega(t + \tau) + \alpha) d\alpha \\ &= \frac{r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + 2\alpha + \omega \tau)] d\alpha \\ &= \frac{r^2}{2} \cos \omega \tau \end{aligned}$$

La moyenne de $x(t)$ est constante et sa corrélation ne dépend que de τ , l'écart entre les deux instants de calcul, $R_x(t, t + \tau) = R_x(\tau)$ donc le processus stochastique $x(t)$ est SSL. De plus, la fonction $R_x(\tau)$ est périodique de période $2\pi/\omega$.

2. On calcule la moyenne temporelle du processus stochastique $x(t)$.

$$\begin{aligned}\bar{x} = \langle x(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r \cos(\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{r\omega}{4\pi} \int_{-T_0}^{T_0} \cos(\omega t + \phi) dt = 0\end{aligned}$$

où $T_0 = 2\pi/\omega$. On a donc $\bar{x} = m_x(t) = 0$. Le processus est à moyenne ergodique. La moyenne temporelle de la corrélation :

$$\begin{aligned}\bar{R}_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T r^2 \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega(t+\tau) + \phi) dt \\ &= \frac{r^2}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \frac{1}{2} [\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + 2\phi + \omega \tau)] dt \\ &= \frac{r^2}{2} \cos \omega \tau\end{aligned}$$

On a donc $R_x(\tau) = \bar{R}_x(\tau)$. Le processus est donc également à corrélation ergodique.

Exercice 05 :

On définit une certaine classe de signaux $y(t)$ par :

$$y(t) = rx(t)\cos(\omega_p t + \phi)$$

où $x(t)$ est un signal aléatoire stationnaire modulant une porteuse sinusoïdale $r\cos(\omega_p t + \phi)$. La moyenne de $x(t)$ est nulle, sa corrélation est $R_x(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance est $S_x(\omega)$. r et ω sont des constantes alors que ϕ est uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. En supposant que ϕ et $x(t)$ sont indépendants, calculer la moyenne, la corrélation et le spectre de puissance de $y(t)$.

Solution :

On calcule la moyenne $m_y(t)$ du processus $y(t)$.

$$m_y(t) = E[y(t)] = E[rx(t) \cos(\omega_p t + \phi)] = rE[x(t)]E[\cos(\omega_p t + \phi)] = 0$$

La corrélation

$$\begin{aligned}R_y(t, t + \tau) &= E[y(t)y(t + \tau)] \\ &= E[r^2 x(t)x(t + \tau) \cos(\omega_p t + \phi) \cos(\omega_p(t + \tau) + \phi)] \\ &= \frac{r^2}{2} E[x(t)x(t + \tau)] E[\cos \omega_p \tau + \cos(2\omega_p t + \omega_p \tau + 2\phi)] \\ &= \frac{r^2}{2} R_x(\tau) \cos \omega_p \tau = R_y(\tau)\end{aligned}$$

La moyenne du processus stochastique $y(t)$ est constante et sa corrélation ne dépend que de l'écart τ entre les instants où elle est calculée, le processus stochastique $y(t)$ est SSL.

Il est donc possible de calculer la densité spectrale de puissance.

$$\Psi_y(\omega) = TF(R_y(\tau)) = \frac{r^2}{2} TF(R_x(\tau) \cos \omega_p \tau)$$

Les transformées de Fourier sont données par :

$$TF(Rx(\tau)) = S_x(\omega)$$

$$TF(\cos \omega_p \tau) = \pi \delta(\omega - \omega_p) + \pi \delta(\omega + \omega_p)$$

En appliquant le théorème de convolution :

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{r^2}{4\pi} S_x(\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_p) + \pi \delta(\omega + \omega_p)] \\ &= \frac{r^2}{4} [S_x(\omega - \omega_p) + S_x(\omega + \omega_p)] \end{aligned}$$

Exercice 06 :

Soit le signal $y(t)$ défini par

$$y(t) = x(t) \cos(\omega_p t + \phi)$$

où $x(t)$ est un signal stationnaire modulant une porteuse sinusoïdale. $x(t)$ est de moyenne nulle, de corrélation $R_x(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_x(f)$. ω_p est une constante et ϕ est uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. $x(t)$ et ϕ sont considérés comme indépendants.

1. Calculer la moyenne et la corrélation de $y(t)$ en fonction de $R_x(\tau)$.
2. $y(t)$ est-il stationnaire au sens large ?
3. Calculer la densité spectrale de puissance de $y(t)$ en fonction de $S_x(f)$.
4. Représenter la densité spectrale de puissance.

Solution :

1. Moyenne :

$$E[y(t)] = E[x(t)] \cos(\omega_p t + \phi) = 0$$

Corrélation :

$$\begin{aligned} E[y(t)y(t+\tau)] &= E[x(t)x(t+\tau)] E[\cos(\omega_p t + \phi) \cos(\omega_p(t+\tau) + \phi)] \\ &= R_x(\tau) \frac{1}{2} E[\cos(\omega_p \tau) + \cos(\omega_p(2t+\tau) + 2\phi)] \\ &= \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos(\omega_p \tau) \end{aligned}$$

2. $y(t)$ est stationnaire au sens large (ordre 1 et 2).
3. Densité spectrale de puissance

$$\begin{aligned} S_y(f) &= TF\left[\frac{1}{2} x(t) \cos(\omega_p \tau)\right] \\ &= \frac{1}{2} S_x(f) * \frac{1}{2} (\delta(f - \omega_p/(2\pi)) + \delta(f + \omega_p/(2\pi))) \\ &= \frac{1}{4} (S_x(f - \omega_p/(2\pi)) + S_x(f + \omega_p/(2\pi))) \end{aligned}$$

4. Dessin.

Exercice 07 :

On considère le filtre numérique défini par la relation de récurrence suivante :

$$y(k) - \frac{1}{2} y(k-1) = x(k)$$

avec $y(k) = 0$, pour $k < 0$.

- (a) Déterminer la fonction de transfert $H(z)$.
- (b) Ce filtre est-il stable ? Justifier.
- (c) Déterminer analytiquement la réponse fréquentielle $H(f)$. Montrer que son module peut s'écrire :

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi f)}}$$

(d) Tracer l'allure de $|H(f)|^2$.

(e) Calculer sa réponse impulsionnelle $h(k)$ de deux façons différentes :

- à partir de la définition de la réponse impulsionnelle ;
- en partant de $H(z)$.

On rappelle que pour $|z| < 1$: $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$

(f) On suppose que $x(k)$ est un signal aléatoire stationnaire au second ordre, centré et de fonction d'autocorrélation :

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ \frac{1}{2} & \tau = \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représenter $R_{xx}(\tau)$.

(g) Déterminer et représenter la densité spectrale de puissance $\Phi_x(f)$ du signal aléatoire $x(k)$.

(h) Déterminer et représenter la densité spectrale de puissance $\Phi_y(f)$ du signal aléatoire $y(k)$.

Solution :

1. $H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Filtre stable.
2. $H(f)$ est périodique de période 1, c'est un filtre passe-bas.
3. $h(n) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
4. $S_X(f) = 1 + \cos(2\pi f)$, périodique de période 1.
5. $S_Y(f) = \frac{1+\cos(2\pi f)}{\frac{5}{4}-\cos(2\pi f)}$, périodique de période 1.

Exercice 08 :

1) On suppose que A et B sont des variables aléatoires indépendantes de moyennes nulles et de variance $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$. On construit le signal :

$$X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Où ω est une constante positive.

- ☞ Le signal $X(t)$ est-il stationnaire ?
- ☞ Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal $X(t)$.

2) On considère un signal aléatoire stationnaire $X(t)$ de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $S_x(f) = 2a$, où a est une constante positive. Le signal $Y(t)$ est obtenu par filtrage linéaire (invariant dans le temps) de $X(t)$ avec un filtre de transmittance :

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Déterminer la densité spectrale de puissance, la fonction d'autocorrélation et la puissance du signal $Y(t)$.

Solution :

1) La moyenne du signal $X(t)$ est :

$$E[X(t)] = E[A] \cos(\omega t) + E[B] \sin(\omega t) = 0.$$

La fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= E\{[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] [A \cos(\omega(t-\tau)) + B \sin(\omega(t-\tau))]\} \\ &= E[A^2] \cos(\omega t) \cos[\omega(t-\tau)] + E[AB] \cos(\omega t) \sin[\omega(t-\tau)] \\ &\quad + E[AB] \sin(\omega t) \cos[\omega(t-\tau)] + E[B^2] \sin(\omega t) \sin[\omega(t-\tau)]. \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires A et B sont indépendantes et de moyennes nulles, on a

$$E[AB] = E[A]E[B] = 0.$$

De plus, $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$, d'où

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t-\tau)] &= \sigma^2 \{ \cos(\omega t) \cos[\omega(t-\tau)] + \sin(\omega t) \sin[\omega(t-\tau)] \} \\ &= \sigma^2 \cos(\omega \tau) \\ &= R_X(\tau). \end{aligned}$$

Puisque la moyenne et la fonction d'autocorrélation du signal $X(t)$ sont indépendantes du temps, le signal $X(t)$ est stationnaire. Sa fonction d'autocorrélation a été déterminée ci-dessus. La densité spectrale de puissance du signal $X(t)$ est :

$$\begin{aligned} s_X(\tau)(f) &= TF[R_X(\tau)] \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \left[\delta\left(f - \frac{\omega}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{\omega}{2\pi}\right) \right] \end{aligned}$$

2) D'après la relation de Wiener-Lee, la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ est :

$$\begin{aligned} s_Y(f) &= s_X(f) |H(f)|^2 \\ &= \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation de $Y(t)$ est donc :

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= TF^{-1}[s_Y(f)] \\ &= e^{-a|\tau|} \text{ (voir tables)} \end{aligned}$$

et par suite la puissance de $Y(t)$ est

$$E[Y^2(t)] = R_Y(0) = 1.$$

Chapitre 3

Analyse spectrale paramétrique et filtrage numérique adaptatif

3.1. Introduction

La représentation du signal sous la forme $x(t)$ est une démarche est naturelle mais elle ne correspond pas forcément à la meilleure représentation physique des signaux rencontrés. En effet, l'individu ou les systèmes électroniques sont souvent plus sensibles à la puissance et à la fréquence des signaux et la représentation du signal sous la forme de sa répartition de puissance en fonction de la fréquence permet, dans bien des cas, d'extraire de manière plus immédiate l'information qui réside dans ce dernier. Le signal est alors représenté par une fonction $S(f)$ appelée *densité spectrale de puissance (DSP)*. Le passage de $x(t)$ à $S(f)$ constitue l'*Analyse Spectrale*. Il existe deux grandes classes de méthodes pour estimer la densité spectrale de puissance d'un signal $x(t)$. La première, l'*estimation spectrale non paramétrique*, n'utilise aucune connaissance a priori sur le signal et part uniquement de l'observation de ce dernier. La deuxième, l'*estimation spectrale paramétrique*, utilise un modèle paramétrique décrivant le signal, modèle à partir duquel il est aisé d'obtenir la densité spectrale de puissance. Les paramètres du modèle sont adaptés en fonction du signal observé.

3.2. Estimation Spectrale paramétrique

Les méthodes paramétriques d'analyse spectrale nécessitent une connaissance a priori sur les caractéristiques du signal (allure générale de son spectre).

Les méthodes d'estimation spectrale paramétriques utilisent un modèle pour obtenir une estimation du spectre. Elles permettent de dresser un modèle mathématique du signal à partir des coefficients d'un filtre. Ces modèles reposent sur une connaissance a priori du processus et peuvent être classées en trois grandes catégories :

- ✎ Modèles autorégressif (AR)
- ✎ Modèles à moyenne ajustée (MA)
- ✎ Modèles autorégressif à moyenne ajustée (ARMA).

L'approche paramétrique se décompose en trois étapes :

1. Choisir un modèle décrivant le processus de manière appropriée.
2. Estimer les paramètres du modèle à partir de données disponibles.
3. Estimer le spectre à partir des paramètres du modèle.

3.2.1. Modèles autorégressif (AR)

Un processus AR est semblable à la fonction de transfert d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie qui représenté par l'équation suivante :

$$x(n) = - \sum_{k=1}^p a_k \cdot x(n-k) + u(n) \quad (3.1)$$

On peut également représenter ce processus par la figure suivante.

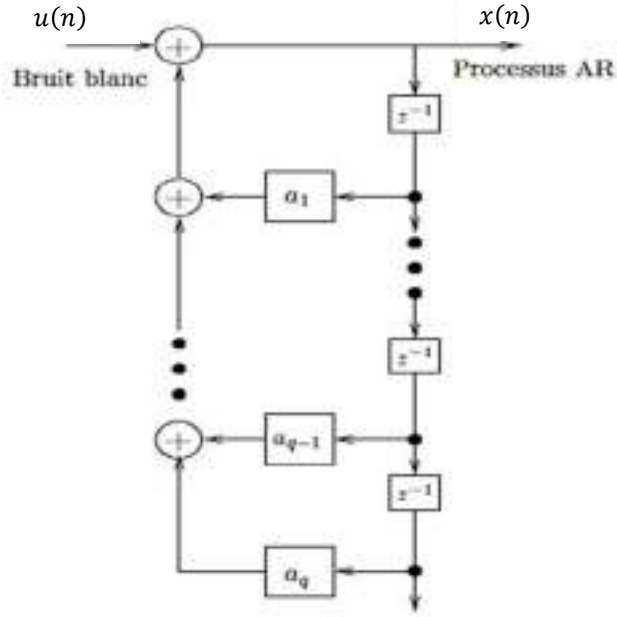


Figure 3.1. Filtre générateur de processus AR.

Elle est dite modèle autorégressif d'ordre p , et notée par $AR(p)$. Le terme autorégressive découle du fait que $x(n)$ est donnée par :

$$x(n) = -a_1x(n-1) - a_2x(n-2) - \dots - a_px(n-p) + u(n)$$

C'est une combinaison linéaire des valeurs précédentes du processus, et la séquence d'entrée $u(n)$.

La transformée en Z est donnée par :

$$X(Z) = -\sum_{k=1}^p a_k \cdot Z^{-k} X(Z) + U(Z) \quad (3.2)$$

La fonction de transfert du filtre $H(Z)$, est donc :

$$H(z) = \frac{X(Z)}{U(Z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot z^{-k}} \quad (3.3)$$

Donc :

$$H(f) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot z^{-j2\pi f}} \quad (3.4)$$

Puisque la densité spectrale de la sortie $x(n)$ est donnée par :

$$G_{xx}(f) = |H(f)|^2 G_{uu}(f) \quad (3.5)$$

Et comme, $G_{uu}(f) = \sigma^2$, on a alors :

$$G_{AR}(f) = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot z^{-j2\pi f}|^2} \quad (3.6)$$

3.2.2. Modèles à moyenne ajustée (MA) :

Un processus MA est représenté par l'équation suivante :

$$x(n) = \sum_{k=0}^q b_k \cdot u(n-k) \quad (3.7)$$

La Densité Spectrale de Puissance est :

$$G_{MA}(f) = \sigma^2 |B(f)|^2 \quad (3.8)$$

Où

$$B(f) = 1 + \sum_{k=1}^q b_k \cdot z^{-j2\pi f} \quad (3.9)$$

D'autre part :

$$G_{MA}(f) = \sum_{k=-q}^q r_{xx}(k) \cdot z^{-j2\pi f k} \quad (3.10)$$

Où

$$r_{xx}(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{l=-q}^q b^*(l) \cdot b(k+l) & \text{pour } k = 0, 1, \dots, q \\ r_{xx}^*(-k) & \text{pour } k = -q, -(q-1), \dots, -1 \end{cases} \quad (3.11)$$

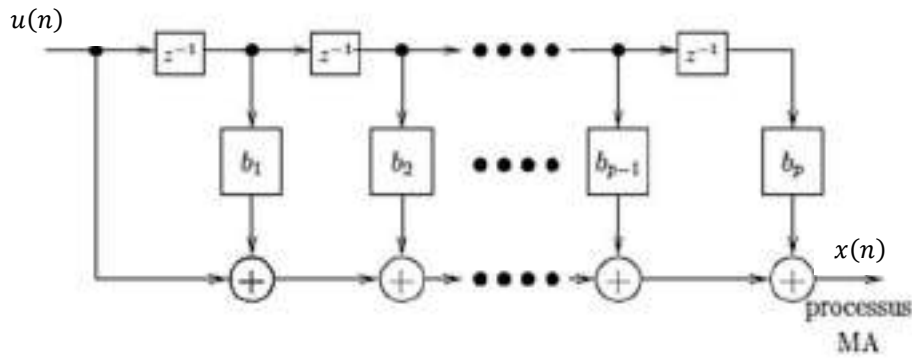


Figure 3.2. Filtre générateur de processus MA.

3.2.3. Modèles autorégressif à moyenne ajustée (ARMA)

Un processus ARMA est la combinaison des modèles AR et MA où le signal $x(n)$ est supposé pouvoir s'écrire en fonction de N valeurs passées et de M échantillons d'un bruit blanc décorrélé. Dans ce cas le signal de sortie est donné par :

$$y(n) = - \sum_{k=1}^p a_k \cdot x(n-k) + \sum_{j=0}^q b_j \cdot u(n-j) \quad (3.12)$$

Avec $u(n)$ est une séquence d'entrée et $x(n)$ la séquence de sortie du système. $u(n)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne zéro et une variance inconnue σ^2 .

$a_k, k = 1, 2, \dots, p$, et $b_k, k = 1, 2, \dots, q$ sont des constants appelés paramètres.

Ce modèle linéaire est appelé modèle ARMA (*Auto Regressive Moving Average*) ou autoregressive à moyenne ajustée (glissante ou mobile) comme le montre la figure 3.3.

La fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \cdot z^{-k} \quad (3.13)$$

Où $A(z) = \text{TZ branche AR} = \sum_{k=0}^p a_k \cdot z^{-k}$

$B(z) = \text{TZ branche MA} = \sum_{k=0}^q b_k \cdot z^{-k}$

En calculant la transformée en Z et à partir de la réponse impulsionnelle :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^p a_k \cdot z^{-k}} \quad (3.14)$$

Il est supposé que $A(z)$ a tous ses zéros à l'intérieur du cercle unitaire du plan z , ceci garantit la causalité et la stabilité du filtre (si cette condition n'est pas vraie, le processus aléatoire ne serait pas SSL).

$$G_{xx}(z) = H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)G_{uu}(z) = \frac{B(z)B^*(1/z^*)}{A(z)A^*(1/z^*)}G_{uu}(z) \quad (3.15)$$

Alors

$$G_{xx}(f) = G_{xx}(z)|_{z=e^{j2\pi f}} \quad (3.16)$$

Comme $U(n)$ est un bruit blanc de moyenne nulle et variance σ^2

$$G_{ARMA}(f) = G_{xx}(f) = \sigma^2 \left| \frac{B(f)}{A(f)} \right|^2 \quad (3.17)$$

Où $A(f) = A(e^{j2\pi f})$ et $B(f) = B(e^{j2\pi f})$

Donc

$$G_{ARMA}(f) = \sigma^2 \left| \frac{\sum_{k=0}^q b_k \cdot z^{-j2\pi f k}}{1 + \sum_{k=0}^p a_k \cdot z^{-j2\pi f k}} \right|^2 \quad (3.18)$$

La détermination

1. Des paramètres a_k , dits autoregressifs
2. Des paramètres b_k , dits à moyenne ajustée
3. De la variance σ^2 du bruit blanc équivaut à déterminer la DSP du processus $x(n)$.
 - si $a_0 = 1$ et $a_k = 0 \forall k \geq 1$, alors $x(n) = \sum_{k=0}^q b_k u(n-k)$ le processus est strictement MA(q) d'ordre q . $G_{MA}(f) = \sigma^2 |B(f)|^2$
 - si $b_0 = 1$ et $b_k = 0 \forall k \geq 1$, alors $x(n) = \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + u(n)$ le processus est strictement AR(p) d'ordre p . $G_{AR}(f) = \sigma^2 |A(f)|^2$

Remarque :

- ⌘ Le modèle ARMA(p,q) est appelé pôle-zéro (pole-zero)
- ⌘ Le modèle AR(p) est appelé tous pôle (all pole)
- ⌘ Le modèle MA(q) est appelé tout zéro (all zero)

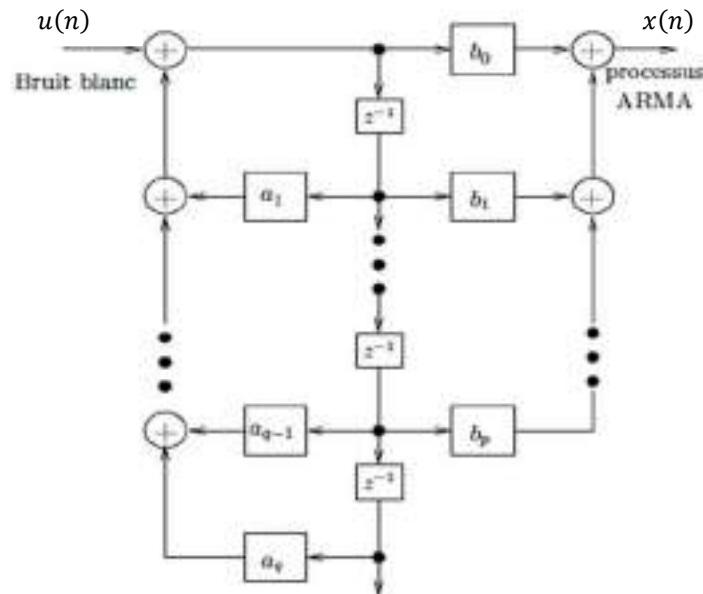


Figure 3.3. Filtre générateur de processus ARMA.

3.3. Relation entre les modèles

On peut exprimer tout modèle ARMA(p,q) ou AR(p) par un modèle MA(∞). De même, on peut exprimer tout modèle ARMA(p,q) ou MA(q) par un modèle AR(∞). Calculons par exemple le modèle AR(∞) équivalent au modèle ARMA(p,q) en écrivant que les deux réponses impulsionnelles sont identiques :

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)} \Leftrightarrow A(z) = B(z)C(z) \quad (3.19)$$

D'où

$$c_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^q b_k c_{n-k} + a_n & 1 \leq n \leq p \\ -\sum_{k=1}^q b_k c_{n-k} & n > p \end{cases} \quad (3.20)$$

On peut éventuellement choisir un modèle AR au lieu d'un modèle ARMA et néanmoins avoir une bonne approximation si l'ordre choisi est suffisamment grand. Cependant, l'ordre nécessaire risque d'être élevé, ce qui conduit à des problèmes de coût calculatoire et de précision d'estimation des paramètres AR.

3.4. Relation entre FAC et paramètres du modèle (Yule-Walker)

On a pour un processus ARMA :

$$G_{xx}(z) = \sigma^2 \frac{B(z)B^*(1/z^*)}{A(z)A^*(1/z^*)} \quad (3.21)$$

Donc

$$G_{xx}(z)A(z) = \frac{B^*(1/z^*)}{A^*(1/z^*)} B(z) \sigma^2 = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) B(z) \sigma^2 \quad (3.22)$$

Utilisant la TZ inverse, on trouve :

$$\begin{aligned} Z^{-1}[G_{xx}(z)A(z)] &= r_{xx}(k) * a(k) = \sum_{l=0}^p a(l)r_{xx}(k-l) \\ Z^{-1}\left[H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) B(z) \sigma^2\right] &= \sigma^2 \sum_{l=0}^q b(l)q(k-l) \end{aligned}$$

$$\text{Où } q(l) = Z^{-1}\left[H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\right] = h^*(-l)$$

Donc on peut écrire :

$$\sum_{l=0}^p a(l)r_{xx}(k-l) = \sigma^2 \sum_{l=0}^q b(l)h^*(l-k)$$

Utilisant la causalité du $H(z)$ c.à.d $h(k) = 0$ pour $k < 0$, le résultat pour un processus ARMA devient :

$$r_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{l=1}^p a(l)r_{xx}(k-l) + \sigma^2 \sum_{l=0}^{q-k} h^*(l)b(l+k) & \text{pour } k = 0, 1, \dots, q \\ -\sum_{l=1}^p a(l)r_{xx}(k-l) & \text{pour } k \geq q+1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Ces équations sont appelées les équations de *Yule-Walker*.

Pour un processus ARMA, la relation entre la FAC et les paramètres est non linéaire à cause du terme $\sum_{l=0}^{q-k} h^*(l)b(l+k)$

On peut récrire ces équations sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(q) & r_{xx}(q-1) & \dots & r_{xx}(q-p+1) \\ r_{xx}(q+1) & r_{xx}(q) & \dots & r_{xx}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(q+p-1) & r_{xx}(q+p-2) & \dots & r_{xx}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{xx}(q+1) \\ r_{xx}(q+2) \\ \vdots \\ r_{xx}(q+p) \end{pmatrix} * \quad (3.24)$$

La majorité des méthodes d'estimation des paramètres ARMA, AR, MA est basée sur les équations de Yule-Walker

- ✎ Dans le cas d'un processus AR
 $b(0)=1$ et $b(l)=0 \forall k \geq 1$, donc $b(l) = \delta(l)$

$$r_{xx}(k) = \begin{cases} -\sum_{l=1}^p a(l)r_{xx}(k-l) + \sigma^2 h^*(0) & \text{pour } k = 0 \\ -\sum_{l=1}^p a(l)r_{xx}(k-l) & \text{pour } k \geq 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

Ces équations qui définissent une relation linéaire entre la FAC et les paramètres AR sont appelées les équations de *Yule-Walker*. Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-(p-1)) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-(p-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Cette équation peut être augmentée en incorporant l'équation pour σ^2 (c.à.d pour $k=0$)

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-(p-1)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p) & r_{xx}(p-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Donc $\sigma^2 = r_{xx}(0) + \sum_{l=1}^p a(l) r_{xx}(-l)$

- ✎ Pour un processus MA
 $a(0)=1$ et $a(k)=0$ pour $k \geq 1$, donc $a(l) = \delta(l)$
avec $a(l) = \delta(l)$ et $h(l) = b(l)$, on peut écrire :

$$r_{xx}(k) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{l=0}^{q-k} b^*(l)b(l+k) & \text{pour } k = 0, 1, \dots, q \\ 0 & \text{pour } k \geq q+1 \end{cases} \quad (3.28)$$

3.5. Méthodes d'estimation spectrale autorégressive

Une variété de méthodes est utilisée pour l'estimation AR. Les performances de ces méthodes pour des segments de données très grands sont comparables. Pour des segments de données petits quelques différences existent entre les différentes méthodes

3.5.1. Relation AR-Prédiction Linéaire

Supposons que $x(n)$ soit un processus AR(p). On cherche à trouver le meilleur prédicteur d'ordre p de $x(n)$:

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) \quad (3.29)$$

Pour cela, on cherche les coefficients α_k qui minimisent la puissance de l'erreur de prédiction :

$$\rho = \mathbb{E} \{ |e(n)|^2 \} = \mathbb{E} \{ |\hat{x}(n) - x(n)|^2 \} \quad (3.30)$$

Or

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbb{E} \left\{ \left[x(n) + \sum_{k=1}^p \alpha_k x(n-k) \right] \left[x^*(n) + \sum_{k=1}^p \alpha_k^* x^*(n-k) \right] \right\} \\ &= r_{xx}(0) + \sum_{k=1}^p \alpha_k r_{xx}(-k) + \sum_{k=1}^p \alpha_k^* r_{xx}(k) + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p \alpha_k \alpha_m^* r_{xx}(m-k) \\ &= r_{xx}(0) + \alpha^H r + r^H \alpha + \alpha^H R \alpha \end{aligned} \quad (3.31)$$

Avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} r_{xx}(1) \\ r_{xx}(2) \\ \vdots \\ r_{xx}(p) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

La minimisation revient à calculer la dérivée et la mettre = 0

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = 2r + 2R\alpha = 0 \Leftrightarrow R\alpha = -r \quad (3.34)$$

C'est les équations de *Yule Walker*

Donc le meilleur prédicteur d'ordre p d'un processus AR(p) est donné par les paramètres AR :

$$\rho_{\min} = \sum_{k=0}^p \alpha_k r_{xx}(-k) \quad (3.35)$$

3.5.2. Algorithme de Levinson

N'importe quelle méthode de résolution des équations linéaires peut être utilisée pour résoudre les équations de *Yule Walker*. Par exemple : l'élimination de Gauss qui nécessite P^3 opérations. Les équations de *Yule Walker* sont spéciales et peuvent être résolues en p^2 opérations par l'algorithme de *Levinson*.

C'est un algorithme qui permet de résoudre tout système du type $Ax = b$ avec A Toeplitz, donc en particulier les équations normales de Yule-Walker :

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(-1) & \dots & r_{xx}(-p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(p) & r_{xx}(p-1) & \dots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

L'algorithme de *Levinson* calcule récursivement les paramètres d'ordre k en fonction des paramètres d'ordre $k-1$ c.à.d. les ensembles de paramètres $\{a_1(1), \rho_1\}, \{a_2(1), a_2(2), \rho_2\}, \dots, \{a_p(1), a_p(2), \dots, a_p(p), \rho_p\}$,

L'ensemble final d'ordre p est la solution cherchée pour les équations de *Yule Walker*. Si $x(n)$ est un processus AR(p), alors $a_p(i) = a(i)$, pour $i = 1, 2, \dots, p$ et $\rho_p = \sigma^2$

Algorithme :

Initialisation :

$$a_1[1] = -\frac{r_{xx}(1)}{r_{xx}(0)}$$

$$\rho_1 = (1 - |a_1[1]|^2) r_{xx}(0)$$

Récursion :

$$a_k[k] = -\frac{r_{xx}(k) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{k-1}[i] r_{xx}(k-i)}{\rho_{k-1}} = k_k$$

$$a_k[i] = a_{k-1}[i] + a_k[k] a_{k-1}^*[k-i] \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$\rho_k = [1 - |a_k[k]|^2] \rho_{k-1}$$

L'algorithme fournit les paramètres de tous les processus AR d'ordre inférieur aussi que le modèle désiré. Cette propriété est utile quand l'ordre du modèle n'est pas connu. Si le processus est réellement AR(p) alors $a_{p+1}(k) = a_p(k)$ pour $k=1, 2, \dots, p$ et $a_{p+1}(p+1) = K_{p+1} = 0$,

D'où $\rho_k = \rho_p$ pour $k > p$

Si on obtient $|K_k| = 1$ pour k donné, la récursion doit être arrêtée car $\rho_k = 0$.

On a besoin de p^2 opérations pour estimer les paramètres.

Les coefficients k_k sont dits coefficients de réflexion.

3.5.3. Algorithme de Burg

C'est un algorithme récursif en ordre qui minimise par rapport au coefficient de réflexion la puissance des erreurs de prédiction directe et rétrograde. On a :

$$e_k^f(n) = x(n) + \sum_{m=1}^k a_k[m] x(n-m) = e_{k-1}^f(n) + k_k e_{k-1}^b(n-1)$$

$$e_k^b(n) = x(n-k) + \sum_{m=1}^k a_k^*[m] x(n-k+m) = e_{k-1}^b(n-1) + k_k^* e_{k-1}^f(n)$$

On cherche à minimiser :

$$\rho_k = \frac{1}{2}(\rho_k^f + \rho_k^b) = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{N-1} |e_k^f(n)|^2 + |e_k^b(n)|^2 \quad (3.37)$$

Si l'on suppose connus k_1, k_2, \dots, K_{k-1} , alors ρ_k ne dépend que de k_k . On a donc :

$$k_k = \frac{-2 \sum_{n=k}^{N-1} e_{k-1}^f(n) e_{k-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=k}^{N-1} |e_{k-1}^f(n)|^2 + |e_{k-1}^b(n-1)|^2} \quad (3.38)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} a_k[k] &= k_k \\ a_k[i] &= a_{k-1}[i] + a_k[k] a_{k-1}^*[k-i] \quad i = 1 \dots k-1 \\ \rho_k &= (1 - |a_k[k]|^2) \rho_{k-1} \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.6. Filtrage Adaptatif

Les filtres tels que nous les avons vus jusqu'à présent sont en général utilisés dans des applications où on connaît la bande de fréquence utile ainsi que la fréquence principale. Ces filtres servent à améliorer le rapport signal sur bruit sous l'hypothèse où la bande de fréquence du bruit est supérieure à celle du signal.

Les filtres de Wiener développés à partir de concepts temporels et non fréquentiels sont conçus pour minimiser l'erreur quadratique moyenne entre leur sortie et une sortie désirée. Ils sont dits optimaux au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne et nous verrons que dans ce cas les coefficients des filtres sont liés à la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée et à l'intercorrélation entre les signaux d'entrée et de sortie désirée.

Quand les fonctions d'auto et d'intercorrélation ne sont pas connues (cas le plus courant), alors on va approcher le filtre optimal de Wiener en utilisant une boucle de retour et un algorithme de minimisation : c'est ce que l'on appelle le *filtrage adaptatif*. Dans ce cas, on remplacera la connaissance des fonctions de corrélation par une phase d'apprentissage permettant de modifier itérativement la réponse impulsionnelle du filtre.

3.6.1. Filtres de Wiener

La figure suivante illustre un problème courant d'estimation linéaire. $x(n)$ correspond au signal qui nous intéresse mais n'est pas directement accessible. Seul $y(n)$ l'est et $y(n)$ est obtenu après passage de $x(n)$ dans un système linéaire suivi de l'addition d'un bruit.

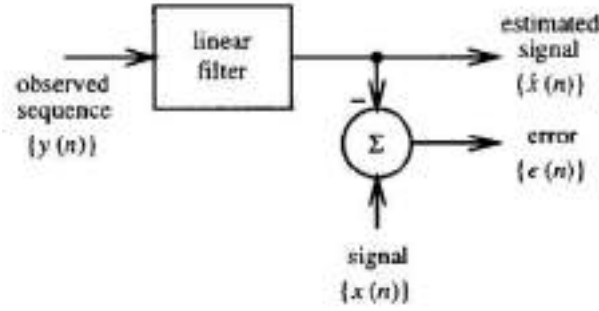


Figure 3.4. Filtrage linéaire.

Le problème qui se pose est comment retrouver $x(n)$ à partir de $y(n)$. Une solution consiste à filtrer $y(n)$ de tel sorte que la sortie $\hat{x}(n)$ soit la plus proche possible de $x(n)$. On peut mesurer la qualité de l'estimation par $e(n)$ défini par :

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) \quad (3.40)$$

Evidemment, plus $e(n)$ sera faible, plus l'estimation sera bonne. On cherche donc un filtre qui minimisera l'erreur. Il est pratique de chercher à minimiser $e^2(n)$ car c'est une fonction quadratique facilement dérivable. Par ailleurs, étant donné que les signaux intéressants sont aléatoires, la fonction coût qui sera à minimiser est l'erreur quadratique moyenne (MSE) définie par :

$$\xi(n) = E(e^2(n)) \quad (3.41)$$

Le filtre optimal de Wiener correspond au filtre qui minimisera la MSE. L'erreur quadratique moyenne est la plus utilisée, car elle conduit à des développements mathématiques complets et simples, fournit la solution en fonction des caractéristiques au second ordre des variables aléatoires, caractéristiques qui sont les plus

Soit h , le filtre de type FIR que nous recherchons et N la longueur de sa réponse impulsionnelle donnée avec une notation matricielle par :

$$h = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{N-1}]^T$$

Le signal estimé $\hat{x}(n)$ est donné par :

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i y(n-i) \quad (3.42)$$

En introduisant la notation matricielle pour $y(n)$

$$\hat{x}(n) = h^T y(n) \Leftrightarrow \hat{x}(n) = y^T(n) h \text{ avec } y(n) = [y(n) \ y(n-1) \ \dots \ y(n-(N-1))]$$

En faisant l'hypothèse que les signaux $x(n)$ et $y(n)$ sont stationnaires, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \xi(n) &= E[e^2(n)] = E[(x(n) - h^T y(n))^2] \\ \Leftrightarrow \xi(n) &= E[x^2(n) - 2h^T y(n)x(n) + h^T y(n)y^T(n)h] \\ \Leftrightarrow \xi(n) &= E[x^2(n)] - 2h^T R_{yx}(n) + h^T R_{yy}(n)h \end{aligned} \quad (3.43)$$

Où est une matrice d'autocorrélation de taille $N \times N$ définie par : $R_{yy} = [y(n)y^T(n)]$

Et où est un vecteur d'intercorrélation de taille N défini par : $R_{yx} = [y(n)x(n)]$

Donc pour un filtre FIR, la fonction coût MSE dépend de la réponse impulsionnelle h . Pour en obtenir le minimum, il suffit de chercher les conditions d'annulation de la dérivée de la fonction coût par rapport aux variables qui sont les N points de la réponse impulsionnelle du filtre.

La dérivée de la fonction coût par rapport au $j^{\text{ème}}$ point de la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j} = E \left[\frac{\partial}{\partial h_j} \{e^2(n)\} \right] = E \left[2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial h_j} \right] = E \left[2e(n) \frac{\partial}{\partial h_j} \{x(n) - h^T y(n)\} \right] \quad (3.44)$$

En utilisant le fait que la sortie du filtre $h^T y(n)$ peut s'écrire comme une somme de N produits dont un seul contient le terme h_j , on a arrivé à l'expression suivante :

$$\frac{\partial \xi}{\partial h_j} = E \left[2e(n) \frac{\partial}{\partial h_j} \{h_j y(n-j)\} \right] = E[-2e(n)y(n-j)] \quad (3.45)$$

On cherche les conditions d'annulation de cette équation pour tous les $j = \{0, \dots, N-1\}$. Ceci nous donne un ensemble de N équations qui peut être écrit de façon matricielle en introduisant le vecteur gradient ∇ :

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial \xi / \partial h_0 \\ \partial \xi / \partial h_1 \\ \vdots \\ \partial \xi / \partial h_j \\ \vdots \\ \partial \xi / \partial h_{N-1} \end{bmatrix} = -2E \begin{bmatrix} y(n)e(n) \\ y(n-1)e(n) \\ \vdots \\ y(n-j)e(n) \\ \vdots \\ y(n-N+1)e(n) \end{bmatrix} = -2E \left\{ \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n-1) \\ \vdots \\ y(n-j) \\ \vdots \\ y(n-N+1) \end{bmatrix} e(n) \right\} = -2E[y(n)e(n)] \quad (3.46)$$

En remplaçant $e(n)$ on obtient :

$$\nabla = -2E[y(n)(x(n) - y^T(n)h)] = -2E[y(n)x(n)] + 2E[y(n)y^T(n)]h \quad (3.47)$$

qui devient en introduisant la matrice d'autocorrélation et le vecteur d'intercorrrelation :

$$\nabla = -2R_{yx} + 2R_{yy}h \quad (3.48)$$

La réponse impulsionnelle optimale h_{opt} est celle qui annule cette équation d'où : $R_{yy} h_{opt} = R_{yx}$

Le filtre ainsi défini est appelé filtre FIR de Wiener. Il permet d'obtenir une erreur quadratique minimale entre $x(n)$ et son estimé $\hat{x}(n)$ donnée par :

$$\xi_{min} = E[x^2(n)] - h_{opt}^T R_{yx} \quad (3.49)$$

3.6.2. Algorithmes pour le filtrage adaptatif

La mise en œuvre d'un filtre (estimateur) optimal de Wiener demande la connaissance des caractéristiques du signal, du bruit et de la fonction de transfert du canal. Cela implique également que ces caractéristiques soient stables au cours du temps, ce qui n'est pas le cas en pratique.

Le filtrage adaptatif a pour objet d'approcher ces filtres optimaux. Pour cela, les coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre sont adaptés en fonction de l'erreur par une boucle de retour comme le montre la figure ci-dessous.

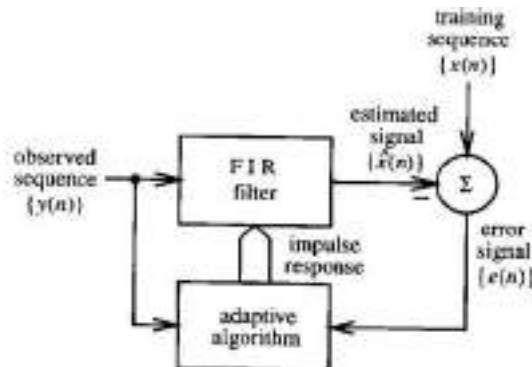


Figure 3.5. Schéma général d'un système de filtrage adaptatif.

Cette adaptation nécessite une séquence d'apprentissage et une stratégie de mise à jour des coefficients du filtre dont l'objectif est la minimisation d'une erreur. Pour cela, on utilisera des algorithmes d'optimisation. On donnera ici les grandes lignes de deux approches largement utilisées en filtrage adaptatif : le RLS et le LMS.

La réponse impulsionnelle d'un filtre adaptatif est donc variable dans le temps. Elle dépend du signal reçu, de la séquence d'apprentissage et de l'algorithme d'optimisation utilisé. Ces filtres peuvent être de type IIR ou FIR.

Le signal estimé $\hat{x}(n)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(n-i) y(n-i) \quad (3.50)$$

$$\Leftrightarrow \hat{x}(n) = h^T(n-1)y \quad (3.51)$$

Ce qui signifie qu'un point à l'instant n est calculé en utilisant la réponse impulsionnelle du filtre calculée le coup précédent par l'algorithme d'optimisation.

Algorithme de gradient stochastique ou (LMS : Least Mean Square)

D'autres techniques d'optimisation basées sur la descente en gradient peuvent être mise en œuvre. L'algorithme du gradient stochastique, ou plus exactement la famille des algorithmes de gradient stochastique, consiste à remplacer le gradient $\nabla J|_{h(n)} = 2R_{yy}h(n) - 2R_{xy}$, quantité déterministe, exacte, par une approximation du gradient calculée à partir des données disponibles. Les données étant considérées comme aléatoires, le gradient estimé devient lui aussi une quantité aléatoire et l'algorithme devient stochastique. Parmi cette famille d'algorithmes, le plus connu est l'algorithme *LMS* (*Least Mean Square*).

Le problème majeur dans le gradient déterministe est que R_{yy} et R_{xy} sont évidemment inconnus. On approchera donc ces grandeurs déterministes par des estimées \hat{R}_{yy} et \hat{R}_{xy} à l'instant n .

Dans le cas du LMS, on choisit les estimées les plus simples possibles, à savoir : $\hat{R}_{yy} = y(n)y^T(n)$ et $\hat{R}_{xy} = x(n)y^T(n)$. Ce sont simplement les estimées instantanées des corrélations.

Remarque : il est immédiat de montrer que cette approche est celle qui consiste à prendre l'algorithme du gradient sur le critère instantané : minimiser $|e(n)|^2$ (au lieu du critère statistique : minimiser $E(|e(n)|^2)$).

Au temps n , on calcule donc la sortie du filtre et l'erreur d'estimation, en utilisant le filtre courant $h(n)$. Le filtre est ensuite mis à jour en ajoutant au filtre courant, le terme correctif $\mu e(n)y(n)$.

On remarquera que $h(n)$ est maintenant un processus aléatoire, ceci signifie que pour des jeux de données différents, les trajectoires obtenues seront différentes.

Algorithme :

valeur initiale: $h(0) = 0$

Répéter pour chaque valeur de $n = 1, 2, \dots$:

$$\hat{x}(n) = h^T(n-1)y(n)$$

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

$$h(n) = h(n-1) + \mu y(n)e(n)$$

Algorithme des moindres carrés récursifs (RLS : Recursive Least Square)

Sachant que les propriétés statistiques nous sont inconnues, on ne va pas chercher à minimiser $E[e^2(n)]$ mais une somme finie d'erreur au carré donnée par :

$$\xi = \sum_{k=0}^n (x(k) - \hat{x}(k))^2 \quad (3.52)$$

Quand cette fonction coût est minimisée en utilisant une réponse impulsionnelle $h(n)$ associée à $\hat{x}(k)$, on obtient l'estimée des moindres carrés.

La réponse impulsionnelle est donc fonction des échantillons disponibles et non pas d'une moyenne statistique générale. Par analogie avec Wiener, elle est donnée par la relation :

$$R_{yy}(n)h(n) = r_{yx}(n) \quad (3.53)$$

$$\text{Où } R_{yy}(n) = \sum_{k=0}^n y(k)y^T(k)$$

$$\text{Et } r_{yx}(n) = \sum_{k=0}^n y(k)x(k)$$

La réponse impulsionnelle du filtre est donc à modifier à chaque nouvel échantillon. Pour limiter le nombre des calculs, on passe par une équation récursive :

$$h(n) = h(n-1) + R_y^{-1}(n)y(n)e(n) \quad (3.54)$$

$$\text{Où } e(n) = x(n) - h^T(n-1)y(n)$$

$$\text{Et } R_y^{-1}(n) = R_y^{-1}(n-1) - \frac{R_y^{-1}(n-1)y(n)y^T(n)R_y^{-1}(n-1)}{(1 + y^T(n)R_y^{-1}(n-1)y(n))}$$

Ces trois équations sont connues sous le nom de l'algorithme RLS donné ci-dessous.

Algorithme :

valeur initiale: $R_{yy}(0) = \frac{1}{\delta} I_N$, δ est très petit

$$h(0) = 0$$

Répéter pour chaque valeur de $n = 1, 2, \dots$:

$$\hat{x}(n) = h^T(n-1)y(n)$$

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

$$R_{yy}^{-1}(n) = \frac{1}{\alpha} \left(R_{yy}^{-1}(n-1) - \frac{R_{yy}^{-1}(n-1)y(n)y^T(n)R_{yy}^{-1}(n-1)}{(\alpha + y^T(n)R_{yy}^{-1}(n-1)y(n))} \right)$$

$$h(n) = h(n-1) + R_{yy}^{-1}(n)y(n)e(n)$$

3.7. Conclusion

Il existe un grand nombre de méthodes d'analyse spectrale et le choix est souvent dicté par l'application considérée. En général, les méthodes non paramétriques trouvent leur intérêt en présence de signaux longs et stationnaires tandis que les méthodes paramétriques sont plutôt utilisées pour les signaux brefs et non stationnaires.

Enfin, les méthodes de modélisation AR peuvent être rendues adaptatives, ce qui permet une analyse temps réel de la densité spectrale de puissance du signal observé.

SÉRIE DE TD N°3 :

Exercice 01 :

1. Soit (X_1, X_2, \dots, X_N) une population de moyenne μ et de variance σ^2 . On considère les deux estimateurs de la moyenne :

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \mu_2 = \sum_{i=1}^N a_i X_i / \sum_{i=1}^N a_i \quad a_i \geq 1$$

- Montrer que ces deux estimateurs sont non biaisés.
- Lequel sera le plus favorable à un étudiant ?

2. Soient (X_1, X_2, \dots, X_N) , N variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre λ . Soient les estimateurs suivants du paramètre λ suivant :

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \hat{\lambda}_2 = \frac{x_1 + x_N}{2}$$

- Que signifient le biais et la variance pour un estimateur ?
- Calculer biais et variance des 2 estimateurs.
- Lequel est le plus efficace et pourquoi ?

Solutions :

1. voir cours $\mu_1 : b=0, \sigma^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 \sigma^2 / \left(\sum_{i=1}^N a_i \right)^2$

2. $b_{\lambda 1}=0, b_{\lambda 2}=0, \sigma_{\lambda 1}^2=\sigma^2/N, \sigma_{\lambda 2}^2=\sigma^2/2$. Le premier (variance plus petite pour $N>2$)

Exercice 02 :

1. Soit un signal aléatoire $y(n)$ SSL et ergodique dont l'autocorrélation temporelle $\bar{R}_y(k) = \alpha^{|k|}$ avec $0 < \alpha < 1$
 - Identifier le modèle linéaire adéquat (AR ou MA) pour $y(n)$.
 - En supposant que le système $h(n)$ est filtre purement récursif, donner le schéma du modèle en définissant l'entrée, le système, et la sortie.
 - Rappeler les hypothèses nécessaires liées à l'emploi de ce modèle.
 - On considère que le modèle est d'ordre 1, déterminer ses paramètres.
2. On considère le filtre linéaire à temps discret défini par : $y(n) = x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$. Où $X(n)$ et $Y(n)$ désignent respectivement les processus aléatoires réels d'entrée et de sortie du filtre où b_1 et b_2 sont 2 coefficients réels. On suppose que $x(n)$ est une suite de variables aléatoires centrées, indépendantes et de variances σ^2 .
 - Donner l'expression de $R_x(k)$ et $S_x(f)$ puis donner l'expression de $R_y(k)$ et tracer la pour $b_1 = 1$ et $b_2 = -1$.
 - Connaissant la DSP du signal $y(n)$, sur quoi se base-t-on pour le choix du modèle ?
3. Soit un processus AR défini par : $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + x(n)$ où $x(n)$ bruit blanc décorréolé de variance σ^2 .
 - Calculer $\mu_y(n)$ puis sans calcul, expliquer pourquoi $y(n)$ est SSL.
 - Montrer que pour $k>0, R_y(k) = -a_1 R_y(k-1) - a_2 R_y(k-2)$
 - Déterminer a_1 et a_2

4. Soit un filtre formeur dont l'équation aux différences est : $y(n) = 0.25y(n-1) - 0.25y(n-2) + x(n)$
- Identifier ce modèle linéaire AR ou MA (Justifier)
 - Déterminer la moyenne de $y(n)$ et donner l'expression de $R_{yy}(k)$.
 - Calculer et tracer $R_{yy}(k)$ (Prendre $R_{xx}(0) = \sigma^2$).

Solutions

1. Modèle AR ($R_y(k) \neq 0$)
 $x(n)$ entrée bruit blanc, $y(n)$ signal aléatoire à modéliser $h(n)$ filtre formeur (modèle math)
 entrée bruit blanc + ergodisme $a_1 = -\alpha$, $\sigma_x^2 = 1 - \alpha^2$
2. $R_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k)$ $S_x(f) = \sigma_x^2$, MA d'ordre 2, $R_y(0) = 1 + b_1^2 + b_2^2$, $R_y(1) = b_1(1 + b_2)$, $R_y(2) = b_2$
 $R_y(k) = 0$ pour $k \geq 0$
3. $\mu_y(n) = 0$ entrée bruit blanc, SSL \Rightarrow sortie SSL

Exercice 03 :

1. On considère un processus de la forme $X(n) = \theta + W(n)$ ou $W(n)$ est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance 1 tel que $W(n)$ et $W(j)$ sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que θ suit une loi $N(0, \sigma^2)$ indépendante de $W(n)$ $n \in \mathbb{Z}$.
 - Caractériser le filtre de Wiener permettant d'estimer θ à partir de $X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p+1}$.
 - Calculer les coefficients du filtre.
2. On considère un processus de la forme $X(n) = b(n) + \alpha b(n-1) + W(n)$ ou $W(n)$ est un processus gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 tel que $W(n)$ et $W(j)$ sont indépendants si $n \neq j$. On suppose que $b(n)$ est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendante de $(W(n))$ $n \in \mathbb{Z}$ et que de même, $b(n)$ et $b(j)$ sont indépendants si $n \neq j$ ($P(b(n) = 1) = P(b(n) = -1) = 1/2$).
 - Construire un filtre qui estime $b(n)$.
3. On considère un problème d'estimation de bruit $b(n)$. Le signal observé est $x(n) = s(n) + b(n) - b(n-1)$. On suppose que le signal $s(n)$ est centre avec $R_{ss}(n) = 0.8^{|n|}$ et qu'il est décorrélé du bruit dont l'autocorrélation est $R_{bb}(n) = 0.8^{|n|}$.
 - Déterminer les moyennes statistiques de $s(n)$ et $b(n)$.
 - Quand a-t-on recours au filtre de Wiener ?
 - Donner les équations de Wiener-Hopf permettant d'estimer $b(n)$
 - Déterminer le filtre de Wiener d'ordre 2 permettant de retrouver le signal utile $\hat{b}(n)$.
 - Exprimer $\hat{b}(n)$

Solutions

1. $R_{xx}(0) = 1 + \sigma^2$, $R_{xx}(k > 0) = \sigma^2$, $R_{\theta x}(k) = \sigma^2$, $b_i = \sigma^2 / (N\sigma^2 + 1)$
2. $R_{xx}(1:3) = (1 + \alpha^2 + \sigma^2, \alpha, 0)$, $R_{bx}(1:3) = (1, 0, 0)$
3. $\mu_s = 0, \mu_b = 0$, $S_b(f) = 0.8$. Quand signal utile et bruit occupent même plage de fréquences. $b_1 = 1/3$ et $b_2 = -1/3$.

Chapitre 4

Analyse temps-fréquence et temps-échelle

4.1. Introduction

La plupart des signaux du monde réel ne sont pas stationnaires, et c'est justement dans l'évolution de leurs caractéristiques (statistiques, fréquentielles, temporelles, spatiales) que réside l'essentiel de l'information qu'ils contiennent. Les signaux vocaux et les images en sont des exemples courants [ondelettes]. Rappelons que l'analyse de Fourier permet une caractérisation globale du signal (on intègre de $-\infty$ à $+\infty$), on perd toute localisation temporelle ou spatiale, l'idéal est de faire appel à une transformation qui nous apporte l'information sur le contenu fréquentiel tout en préservant la localisation (temporelle ou spatiale) afin d'obtenir une représentation temps/fréquence ou espace/échelle du signal. C'est ainsi que deux théories ont été élaborées, la transformée de Fourier à fenêtre glissante puis la transformée continue par ondelettes.

Les ondelettes, famille de fonctions déduites d'une même fonction, appelée ondelette mère, par opérations de translations et dilatations, ont trouvé, de par la puissance de leur théorie, des applications dans de nombreux domaines aussi variés que les mathématiques (analyse,...), le traitement du signal (compression, astronomie, ...), la physique (mécanique quantique,...).

4.2. Analyse temps-fréquence

4.2.1. Transformée de Fourier : inconvénients

L'analyse fréquentielle complète l'analyse temporelle en fournissant des informations sur la répartition en fréquences de l'énergie du signal concerné, les méthodes conventionnelles utilisées sont celles de Fourier. Ces méthodes sont des outils mathématiques très utilisées, transformant le signal de sa base temporelle à une base fréquentielle (sommes des fonctions exponentielles). La transformée de Fourier (TF) d'un signal $x(t)$ définie par :

$$TF\{x(t)\} = \langle x(t).e^{-j\omega t} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-j\omega t} dt \quad (4.1)$$

Si la TF permet de connaître le contenu fréquentiel d'un signal, le passage en Fourier fait perdre toute l'information temporelle. Prenons l'exemple de deux notes de piano jouées simultanément, dont la représentation temporelle ainsi que sa transformée de Fourier sont représentés sur la figure 4.1. La lecture du spectre nous donne directement la fréquence des notes jouées.

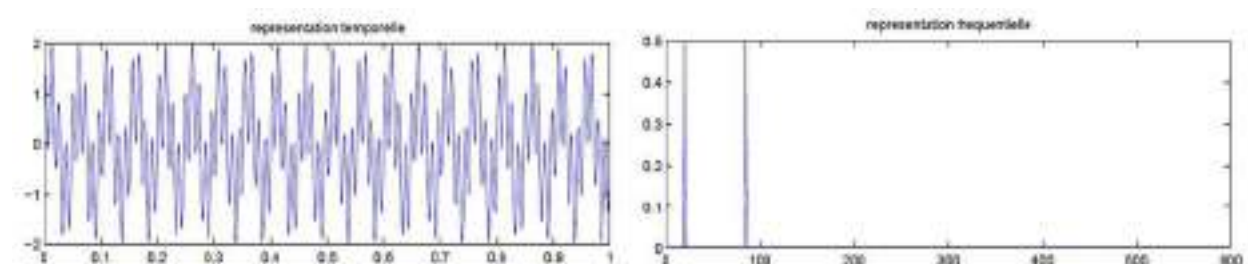


Figure 4.1. Représentation temporelle et fréquentielle d'un signal de piano : les notes sont jouées en même temps.

On représente maintenant sur la figure 4.2 un signal de piano où les mêmes notes sont jouées l'une après l'autre. Si la transformée de Fourier nous indique toujours parfaitement la fréquence des deux notes jouées, on n'a aucune information sur le moment où les notes sont jouées. On aimerait donc exploiter à la fois l'information temporelle et fréquentielle d'un signal. On est donc obligé d'aller plus loin en définissant des transformées qui prennent en compte à la fois l'information temporelle et l'information fréquentielle.

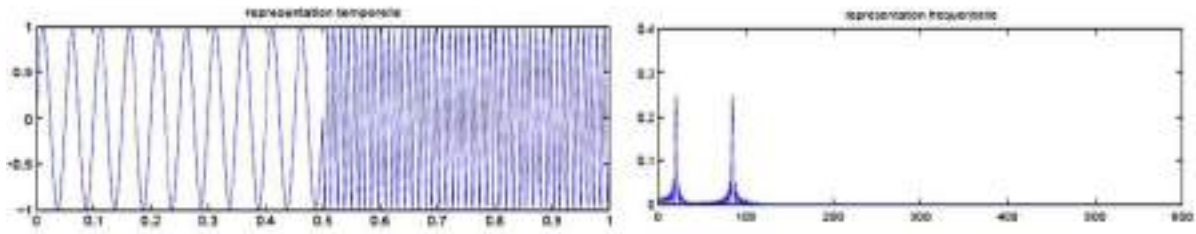


Figure 4.2. Représentation temporelle et fréquentielle d'un signal de piano : les notes sont jouées l'une après l'autre.

On présente ici les deux représentations temps-fréquence principales : la transformée de Fourier à court terme et la transformée en ondelettes. Pour cette dernière, on parlera plutôt de transformée temps-échelle.

4.2.2. Dualité temps- fréquence et Transformée de Fourier à court terme (STFT)

Afin de remédier à ce défaut, Dennis Gabor (1946) a introduit la notion de l'analyse temps-fréquence et a adapté la TF pour une analyse spectrale « local » du signal dans le domaine temporel, à l'aide d'une fenêtre que l'on fera « glisser » le long du signal. L'idée générale est de calculer la TF non pas sur le signal entier, mais sur une fenêtre glissante pour pouvoir suivre l'évolution temporelle des composantes fréquentielles. Cette adaptation de Gabor appelée transformée de Fourier à court terme TFCT ou (STFT : *Short-time Fourier transform*) présente le signal en une fonction à deux dimensions en temps et en fréquence. On va donc faire la corrélation du signal avec différents *atomes temps-fréquence* qui auront une certaine concentration (ou résolution) en temps et en fréquence. La transformée de Fourier à court terme d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$STFT\{t, \omega\} = \langle x(\omega) \cdot g(\tau - t)e^{-j\omega\tau} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g^*(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.2)$$

Où $g(t)$ est une fenêtre de pondération (Rectangulaire, Bartlett, Hanning, Hamming, ... etc.)

Il faut relever qu'il n'existe pas qu'une seule STFT puisqu'elle dépend de : La durée de la fenêtre (choisie pour que le signal soit supposé stationnaire sur cette durée), la forme de la fenêtre (compromis largeur-hauteur des lobes), le taux de recouvrement entre les fenêtres.

Le choix de la taille de la fenêtre est pertinent et il pose problème lorsqu'il doit être fixe, en effet :

- ✎ Une faible taille de fenêtre favorisera la résolution fréquentielle au détriment de la résolution temporelle. C'est-à-dire risque de non stationnarité.
- ✎ Dans le cas contraire, on aura une mauvaise résolution fréquentielle pour une bonne résolution temporelle.

C'est ce qu'on appelle habituellement "Principe d'incertitude d'Heisenberg" : impossible de localiser précisément un signal en temps et en fréquence.

Le compromis entre la résolution temporelle Δt et la résolution fréquentielle $\Delta \omega$ dépend du choix de la fonction de pondération $g(t)$. Deux impulsions dans le domaine temporel ne peuvent être distinguées que si la distance qui les sépare est supérieure à Δt :

$$\Delta t^2 = \frac{\int t^2 |g(t)|^2 dt}{\int |g(t)|^2 dt} \quad (4.3)$$

De même, $\Delta \omega$ correspond à la différence fréquentielle minimale pour que deux sinusoïdes pures puissent être discriminées par la transformée de Fourier à court terme :

$$\Delta \omega^2 = \frac{\int \omega^2 |g(\omega)|^2 d\omega}{\int |g(\omega)|^2 d\omega} \quad (4.4)$$

Le principe d'incertitude d'Heisenberg dit en fait que le produit de ces deux résolutions a une borne inférieure, ce qui signifie bien qu'une amélioration de la résolution temporelle ne peut être obtenue qu'au détriment de la résolution fréquentielle et vice versa :

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

Le principe d'incertitude d'Heisenberg, nous certifie qu'on ne peut pas avoir une localisation parfaite à la fois en temps et en fréquence. En d'autres termes, si on obtient une bonne résolution en fréquence (petite valeur $\Delta \omega$), on aura un temps d'observation long (grande valeur de Δt) et donc la résolution en temps sera mauvaise. Par contre, dans le cas d'une meilleure résolution en temps (petite valeur Δt), une bande fréquentielle large est présente (grande $\Delta \omega$).

Cependant, la TFTC présente aussi un inconvénient majeur à savoir la taille de la fenêtre est fixe. Évidemment, que nous pouvons la choisir, mais durant toute la durée de l'analyse du signal, la fenêtre gardera la même taille. Or un signal, souvent non stationnaire, peut présenter une variabilité qui évolue fortement dans le temps. Alors si on choisit :

- ✎ Une fenêtre de taille faible nous allons favoriser les détails rapides du signal
- ✎ Dans le cas contraire nous n'allons plus pouvoir localiser dans le temps ces mêmes détails rapides.

Remarque : La solution est de choisir une fenêtre de taille variable.

Pour mieux expliquer la différence entre une taille fixe et une taille variable de la fenêtre d'analyse, reprenons le principe des boîtes **de Heisenberg** pour les deux cas :

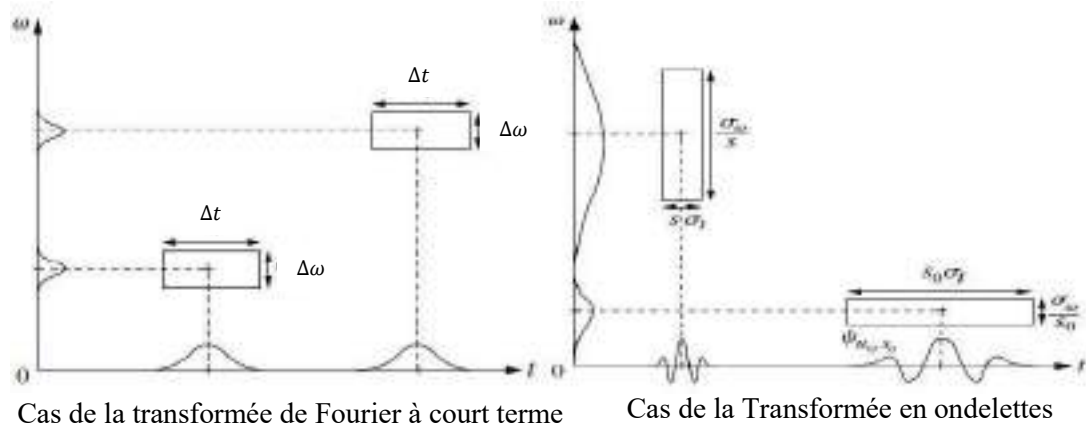


Figure 4.3. Boîte de Heisenberg représentant un atome temps-fréquence.

On appelle généralement *Spectrogramme* le carré du module de la transformation de Fourier à court terme associé à une distribution d'énergie (carré du signal) et qui prend la forme :

$$S_x(t, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g^*(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (4.6)$$

Le spectrogramme est une analyse mono-résolution; on ne peut être à la fois « précis » en temps et en fréquence. Cependant, pour une large classe de signaux réels, les zones d'énergie sont non-stationnaires sur des périodes courtes à haute fréquence d'où l'intérêt d'une analyse multi-résolution.

4.2.3. Nécessité de l'analyse d'ondelettes

Bien que délivrant une information temporelle, la transformée de Fourier à court terme s'avère toutefois insuffisante pour certaines applications. Cette dernière repose sur l'emploi d'une « fenêtre glissante », dans laquelle on considère que le signal est localement stationnaire, est utilisée comme masque sur le signal à analyser. Cependant, la fenêtre étant définie pour tout le signal, la résolution d'analyse est fixe : la transformée ne pourra être efficace à la fois sur des signaux à faibles fréquences et sur des signaux à fréquences élevées, ce qui limite l'adaptivité d'une analyse par transformée de Fourier à court terme. Donc l'inconvénient majeur de la TFCT est la taille fixe de la fenêtre. L'outil idéal serait une fenêtre qui s'adapte aux variations de fréquence dans le signal à analyser. Cet outil existe, il s'agit de la récente analyse en ondelettes.

L'analyse par ondelette est introduite pour résoudre ces problèmes, en permettant l'analyse spatio-temporelle de signaux à différents niveaux de résolution. Elle est conçue pour être adaptative, c'est-à-dire on utilise un intervalle de temps long quand on a besoin de plus de précision dans l'information fréquentielle basse ; et on utilise des petites régions quand on a besoin des informations sur les hautes fréquences.

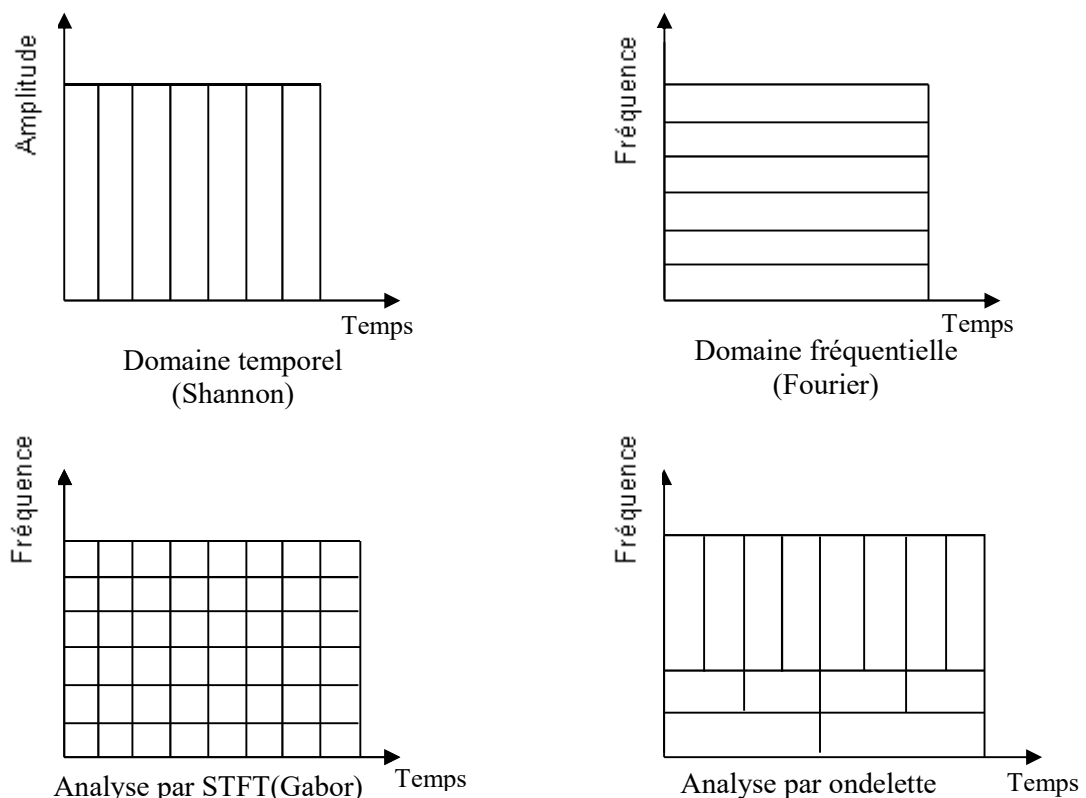


Figure 4.4. Pavage temps-fréquence symbolisant différentes représentations d'un signal.

4.3. Ondelettes continues, discrètes et ondelettes dyadiques

4.3.1. Ondelettes continues

Elle a été introduite par *Jean Morlet* en 1981 pour résoudre des problèmes de signaux sismiques en recherche pétrolière. Partant d'une fenêtre g (dite fonction mère) ayant pour symbole y dépendant de t , on peut générer un ensemble de fonctions de base similaire par dilatation (indice a) et translation (indice b) d'un seul prototype $\psi_{a,b}$:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } a \neq 0 \quad (4.7)$$

Où les coefficients a et b désignent respectivement le facteur d'échelle pour la dilatation de ψ , et le facteur de translation. La figure 4.5 présente un exemple de génération d'une base d'ondelettes. L'ondelette mère utilisée dans cet exemple est celle de Grossman et Morlet (1984). Son équation est :

$$\psi(t) = \cos(5t) \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (4.8)$$

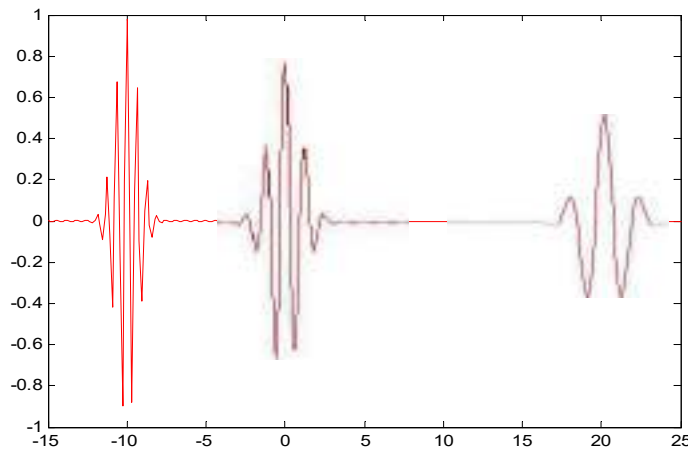


Figure 4.5. Génération d'ondelette par dilatation et translation

De gauche à droite, une ondelette contractée ($a=1$; $b=-10$), L'ondelette mère ($a=1.5$; $b=0$) et une ondelette dilatée ($a=2$; $b=20$).

Remarque : Toutes ondelettes générées ont la même énergie que l'ondelette mère.

Définition : La transformée en ondelettes (TO) d'un signal $x(t)$ peut donc être définie comme la projection sur la base de ces fonctions ondelettes :

$$X(a,b) = TO(x(t)) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (4.9)$$

$$X(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \psi_{a,b}(t) dt \quad (4.10)$$

Où $\psi(t)$ est une fonction d'énergie finie.

La quantité $|X(a,b)|^2$ est appelée *scalogramme* de $x(t)$.

Le noyau de la transformée en ondelettes $\psi(t)$ est appelé l'ondelette mère (exemple Morlet, Haar, ...etc.), et il a généralement un spectre à bande étroite.

L'ondelette mère peut être interprétée comme une sinusoïde fenêtrée et pondérée (comme l'ondelette de Morlet). Donc la transformée en ondelettes peut être considérée comme une sorte de transformée de Fourier à court terme. En effet, le paramètre d'échelle d'une transformée en ondelettes est analogue à la fréquence dans une transformée de Fourier.

Inversion de la transformée en ondelettes continue : On outre, de façon à assurer l'inversibilité de la transformée en ondelette, la fonction ψ doit vérifier un certain nombre de propriétés. La première d'entre elles se nomme condition d'admissibilité.

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega} < \infty \quad (4.11)$$

Cette condition permet d'analyser le signal, puis de le reconstruire sans perte d'information. La condition d'admissibilité implique en outre que la transformée de Fourier de l'ondelette à la fréquence du continu (pour) doit être nulle.

Tout comme la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes est inversible.

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} \langle x | \psi_{a,b} \rangle \psi_{a,b} da db \quad (4.12)$$

Ondelettes réelles et complexes :

Les ondelettes réelles sont bien adaptées pour détection de changements brusques dans un signal. Les ondelettes complexes (ou analytique) sont utilisées pour séparer la phase et l'amplitude des composantes d'un signal.

4.3.2. Ondelettes discrètes et Ondelettes dyadiques

Dans les applications, comme le traitement des images, la quantité d'information à traiter peut être importante, il est nécessaire d'optimiser les calculs et la taille des données. La transformée en ondelettes dyadique est une représentation invariante par translation car le paramètre de translation n'est pas échantillonné. Pour construire cette représentation, les fonctions de bases sont générées à partir d'une fonction mère par :

- ✎ Dilatations ou contractions dyadiques par un facteur $a = 2^{-j}$;
- ✎ Translations binaires pour une échelle donnée de dilatation 2^{-j} les translations sont $b = k2^{-j}$, k entier.

Donc les fonctions de bases sont dénombrables et générées à partir d'une fonction mère par dilatations et translations dyadiques :

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k) \\ g(j, k) &= \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} x(t) \bar{\psi}_{j,k}(t) dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cette transformation dyadique est aussi connue sous le nom de transformée en ondelettes discrètes. Pour un j donné les supports des $\psi_{j,k}(t)$ sont disjoints et contigus.

Chaque fonction de base $\psi_{j,k}(t)$ est caractérisée par sa largeur (échelle) 2^{-j} et sa position k .

En représentation (temps, fréquence), chaque fonction de base représente approximativement un rectangle de largeur 2^{-j} en temps et de largeur $2j$ en fréquence.

La fonction $x(t)$ peut être reconstruite par :

$$x(t) = \sum_k \sum_p g(t) \psi_{j,k}(t) \quad (4.14)$$

Ou encore :

$$x(t) = g_0 \phi(t) + g_1 \psi(t) + \sum_{k>0} \sum_{p \in \mathbb{Z}} g(j, k) \psi(2^j t - k) \quad (4.15)$$

La transformation en ondelettes discrète est presque naturellement associée à des algorithmes plus efficaces et plus rapides que des algorithmes du type FFT qui utilisent la transformée de Fourier. Une famille d'ondelettes par exemple couramment utilisée dans la transformation en ondelettes discrète est la famille infinie des ondelettes orthogonales de Daubechies : c'est une des familles d'ondelettes les plus performantes.

4.4. Analyse multi-résolution et bases d'ondelettes

L'idée de l'analyse multirésolution (AMR) définie par Meyer et Mallat en 1989, est un outil mathématique permet d'analyser un signal à différentes échelles à travers des opérateurs linéaires à des niveaux de résolutions correspondant à différentes bandes de fréquences spatiales. L'AMR permet de rapprocher l'analyse en variable d'espace avec l'analyse en variable de fréquence. Elle formalise l'idée intuitive selon laquelle tout signal peut être construit par raffinements successifs, c'est-à-dire par l'ajout de détails lorsque l'on passe d'une résolution à la suivante.

Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

$$1. \{0\} \dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots \subset V_{j+1} \subset V_{j+2} \dots L^2(\mathbb{R}) \quad (a)$$

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$$

$$2. \forall (i, j) \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j \quad (b)$$

$$3. \forall (i, j) \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1} \quad (c)$$

$$4. \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) \quad (d)$$

$$5. \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \quad (e)$$

$$6. \exists \phi(t) \in V_0 \setminus \{\phi(t - k), k \in \mathbb{Z}\} \text{ base orthonormée de } V_0 \quad (f)$$

Dans ce contexte, l'AMR d'un signal $f(t)$ de $L^2(\mathbb{R})$ consiste à calculer les projections orthogonales de $f(t)$ sur les espaces V_j , $j \in \mathbb{Z}$. Donnons maintenant quelques explications intuitives concernant cette définition ainsi que certaines de ses conséquences :

- ✎ La première propriété (relation (a)) montre que V_{j+1} est l'image de V_j par une dilatation d'un facteur de « 2 » ; autrement dit, elle assure que toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ peut-être approchée dans cette analyse ;
- ✎ La deuxième propriété (relation (b)) montre que pour tout j , V_{j+1} est un sous espace de V_j , ce qui revient à dire qu'un signal basse résolution est aussi un signal haute résolution ;

- ✎ La relation (d), respectivement (e) montre que l'intersection des V_j est réduite à « 0 » dans L^2 (à la résolution minimale, on perd toute l'image) et que la réunion de V_j est dense dans L^2 (à la relation infinie, on reproduit parfaitement tous les signaux) ;
- ✎ La condition (c) assure que les espaces V_m correspondent à différentes résolutions, tandis que l'invariance par translation $f \in V_m \rightarrow f(t - 2^m n) \in V_m, \forall n \in \mathbb{Z}$ est une conséquence de (a).
- ✎ Une base orthonormée peut se déduire d'une base de V_0 à partir d'une seule fonction $\varphi(t)$ appelée fonction d'échelle en construisant dans le cas dyadique par :

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - n) \quad j, n \in \mathbb{Z} \quad (4.16)$$

Les coefficients d'approximation a_n^j , d'un signal $f(t)$ au à l'échelle « j » sont obtenus par la projection du signal sur les éléments de la famille $\varphi_{j,n}$: $A_j f = \sum \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}$ ou le produit scalaire $a_n^j = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$.

La différence d'information entre deux résolutions successives conduit à introduire les coefficients de détail, de sorte que les coefficients d'approximation à une résolution donnée se calculent à partir des coefficients d'approximation et de détail à la résolution suivante.

Pour compléter l'analyse nous avons besoin d'un espace complémentaire W_j (espace des détails) orthogonal à V_j dans V_{j+1} . L'ensemble des W_j , couvre tout l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et les W_j sont orthogonaux deux à deux.

De façon similaire aux V_j , les W_j vérifient un certain nombre de conditions :

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} W_j &= L^2(\mathbb{R}) \\ \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} W_j &= \{0\} \\ f(t) \in W_j &\Leftrightarrow f(2t) \in W_{j-1} \\ f(t) \in W_j &\Leftrightarrow f(t-k) \in W_j \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Les espaces V_j et W_j sont liés entre eux par la relation $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Les espaces d'approximations (V_j) et de détails (W_j) étant orthogonaux, toute l'information du signal est conservée. Par conséquent, nous pourrions reconstruire exactement notre signal. La fonction générant W_j est une fonction d'ondelette ψ en construisant dans le cas dyadique par :

$$\psi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - n) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.17)$$

Constitue une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, une fonction ondelette $\psi(t)$ de W_0 , est prise de telle sorte que la famille : $\{\psi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ soit une base orthonormée de W_0 .

Les coefficients de détails d_n^j , d'un signal $f(t)$ au à l'échelle « j » sont obtenus par la projection du signal sur les éléments de la famille $\psi_{j,n}$: $D_j f = \sum \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$ ou par le produit scalaire $d_n^j = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$.

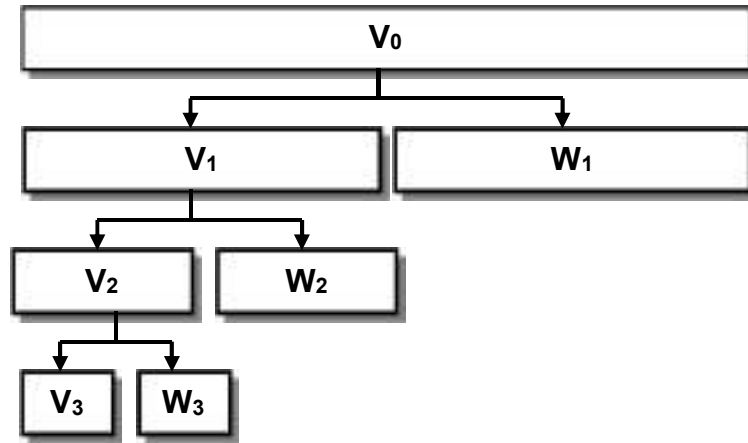


Figure 4.6. Schéma de l'analyse Multirésolution

Nous pouvons considérer que notre signal correspond à l'espace V_0 . Cet espace sera ensuite décomposé en deux espaces : un espace d'approximations et un espace de détails. L'espace d'approximation nous permettra d'extraire les basses fréquences de notre image d'origine. L'espace des détails nous servira pour extraire les hautes fréquences. L'opération s'effectue récursivement sur les espaces d'approximation. Nous obtiendrons alors une analyse fréquentielle des hautes fréquences avec les espaces des détails et une analyse des basses fréquences grâce aux espaces d'approximation. Nous aurons alors plusieurs images correspondant à différentes bandes fréquentielles.

4.4.1. Application de l'algorithme de de l'analyse multirésolution Stéphane sur un signal

4.4.1.1. Décomposition

L'analyse multirésolution permet de décomposer un signal donné $f(t)$ en coefficients d'approximation et de détail à partir d'une fonction d'échelle $\varphi(t)$ et d'une fonction d'ondelette mère $\psi(t)$, chacune de ces fonctions est estimée au moyen des séquences $h(n)$ et $g(n)$ et il suffit de connaître les valeurs de $h(n)$ pour effectuer la décomposition par une analyse multirésolution. On peut écrire l'approximation du signal $f(t)$ à la résolution 2^j grâce à l'opérateur A_j en décomposant le signal sur la base orthogonale définie ci-dessus :

$$\forall f(t) \in L^2(R) : A_{2^j} f(t) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f(t), \varphi_{2^j}(t - 2^{-j}n) \rangle \varphi_{2^j}(t - 2^{-j}n) \quad (4.18)$$

L'approximation de $A_{2^j}^d f(t)$ (approximation discrète de $f(t)$ à la résolution 2^j) est définie par l'ensemble des produits internes données par :

$$A_{2^j}^d f = \langle f(t), \varphi_{2^j}(t - 2^{-j}n) \rangle \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.19)$$

L'équation (4.19) peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$A_{2^j}^d f = \left[(f(t) * \varphi_{2^j}(-t)) (2^{-j}n) \right]_{n \in \mathbb{Z}} \quad (4.20)$$

L'équation (4.20) peut être interprété comme suit : $A_{2^j}^d f(t)$, est obtenue par un filtrage passe bas de $f(t)$ suivie d'un sous-échantillonnage d'un taux 2^j [52]. $A_{2^j}^d f$ peut-être donc obtenue à partir de $A_{2^{j+1}}^d f$ (approximation discrète à la résolution $(j+1)$) par :

$$A_{2^j}^d f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k-2n) A_{2^{j+1}}^d = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(2n-k) A_{2^{j+1}}^d \quad (4.21)$$

Avec, $\tilde{h}[n] = h[-n]$, h est la réponse impulsionnelle du filtre miroir H . Ainsi $A_{2^j}^d f$ peut être calculé en convoluant $A_{2^j}^d f$ avec le filtre \tilde{h} et en gardant un échantillon sur deux du signal de sortie, d'où un phénomène de décimation (Figure 4.7).

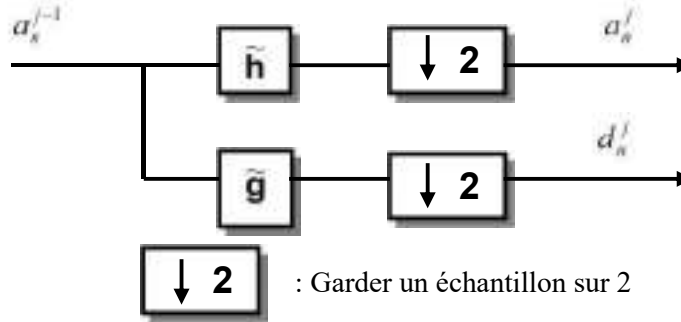


Figure 4.7. Décomposition unidimensionnelle par ondelettes.

On appelle détails du signal à la résolution 2^j , la différence d'information entre les approximations d'un signal $f(t)$ à la résolution 2^j et 2^{j+1} .

$$\text{Ainsi} \quad D_{2^j}^d f = \langle f(t), \psi_{2^j}(t - 2^{-j}n) \rangle = \left[(f(t) * \psi_{2^j}(-t))(2^{-j}n) \right]_{n \in \mathbb{Z}} \quad (4.22)$$

L'équation (4.22) représente le signal de détails discret à la résolution 2^j . $D_{2^j}^d f$ peut être obtenue en convoluant $A_{2^{j+1}}^d f$ avec un filtre de réponse impulsionnelle \tilde{g} (filtre passe-haut) suivie d'une opération de décimation (en gardant un échantillon sur deux du signal de sortie) suivant la formule ci-dessous :

$$D_{2^j}^d = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(k-2n) A_{2^{j+1}}^d f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(2n-k) A_{2^{j+1}}^d f \quad (4.23)$$

Notons que les filtres h et g sont reliés par la relation suivante :

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n] \quad (4.24)$$

Les équations (4.20) et (4.23) montrent qu'on peut calculer les coefficients d'ondelettes en fonction des différentes approximations suivant le schéma représenté sur la figure 4.7. Les filtres \tilde{H} et \tilde{G} appelés en traitement du signal : **filtres miroirs en quadrature**.

4.4.1.2. Reconstruction

La décomposition sur la base d'ondelettes orthogonales permet d'avoir une reconstruction exacte du signal originel en ajoutant à l'approximation discrète à la résolution 2^j le signal de détail correspondant.

$$A_{2^{j+1}}^d f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] A_{2^j}^d(k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] D_{2^j}^d(k) \quad (4.25)$$

Cette reconstruction est montrée par la figure 4.8. Chaque coefficient d'approximation est obtenu par la somme du filtrage par h des coefficients d'approximation à la résolution précédente auxquels sont intercalés des zéros et du filtrage par g des coefficients de détails (d'ondelettes) auxquels sont également intercalés des zéros, d'où un phénomène de sur-échantillonnage.

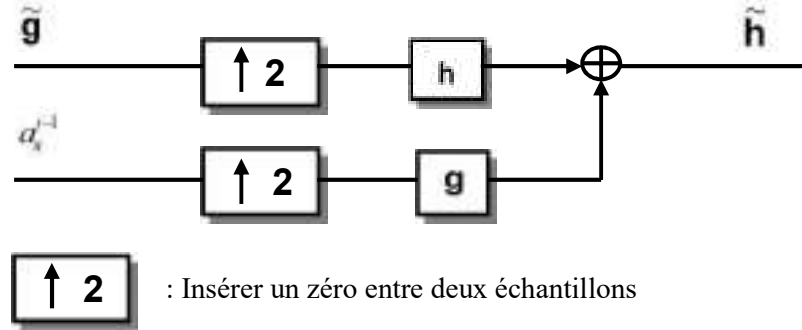


Figure 4.8. Reconstruction unidimensionnelle par ondelettes.

4.4.2. Application de l'algorithme de l'analyse multirésolution sur une image

a) Décomposition

La théorie des ondelettes peut être particulièrement généralisée aux cas multidimensionnel. Bien que s'appliquant aussi dans le cas monodimensionnel, le concept de l'analyse multirésolution décrite précédemment, a été introduit par Mallat (1989) pour une application à l'image. Dans ce but, on introduit une fonction d'échelle bidimensionnelle séparable, cette fonction est définie comme étant le produit de deux fonctions d'échelle unidimensionnelle définie par :

$$\varphi(x, y) = \varphi_{j,k}(x) \cdot \varphi_{j,k}(y) \quad (4.26)$$

Où $\varphi_{j,k}(x)$ et $\varphi_{j,k}(y)$ sont respectivement la fonction d'échelle appliquée dans la direction « x », et la fonction d'échelle appliquée dans la direction « y ».

Une analyse multirésolution dans le cas bidimensionnel est une séquence de sous espaces emboîtés de $L^2(R^2)$. Les définitions dans le cas unidimensionnel sont valables dans le cas bidimensionnel. Une fonction d'échelle est ainsi définie et la famille des fonctions d'échelle définie par :

$$\left[2^{-j} \varphi_{2^j}(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m) \right]_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} = \left[2^{-j} \varphi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \varphi_{2^j}(y - 2^{-j}m) \right]_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

forme une base orthogonale de (V_j) .

L'approximation discrète du signal image $f(x, y)$ à la résolution 2^j est définie par :

$$A_{2^j}^d f = \left[\langle f(x, y), \varphi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \varphi_{2^j}(y - 2^{-j}m) \rangle \right]_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad (4.27)$$

L'expression de la différence d'information existante entre deux approximations successives d'une même image s'effectue à l'aide de trois ondelettes directionnelles qui s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi^D(x, y) &= \psi_{j,k}(x) \psi_{j,k}(y) \\ \psi^H(x, y) &= \varphi_{j,k}(x) \psi_{j,k}(y) \\ \psi^V(x, y) &= \psi_{j,k}(x) \varphi_{j,k}(y) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Où ψ^D, ψ^H, ψ^V sont respectivement les ondelettes permettant le calcul de la différence d'information dans les directions diagonales, horizontales et verticales.

Les signaux de détails à la résolution 2^j sont donnés par :

$$D_{2^j}^H = \left[\langle f(x, y), \psi_{2^j}^H(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m) \rangle \right]_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \text{ détails horizontaux} \quad (4.29)$$

$$D_{2^j}^V = \left[\langle f(x, y), \psi_{2^j}^V(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m) \rangle \right]_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \text{ détails verticaux} \quad (4.30)$$

$$D_{2^j}^D = \left[\langle f(x, y), \psi_{2^j}^D(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m) \rangle \right]_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \text{ détails diagonaux} \quad (4.31)$$

Comme dans le cas monodimensionnel, le calcul des approximations successives s'effectue à l'aide des filtres numériques. Dans le cas de l'image, les filtres seront appliqués en lignes puis en colonnes. La figure 4.9 présente l'analyse d'une image numérique par l'algorithme de Mallat.

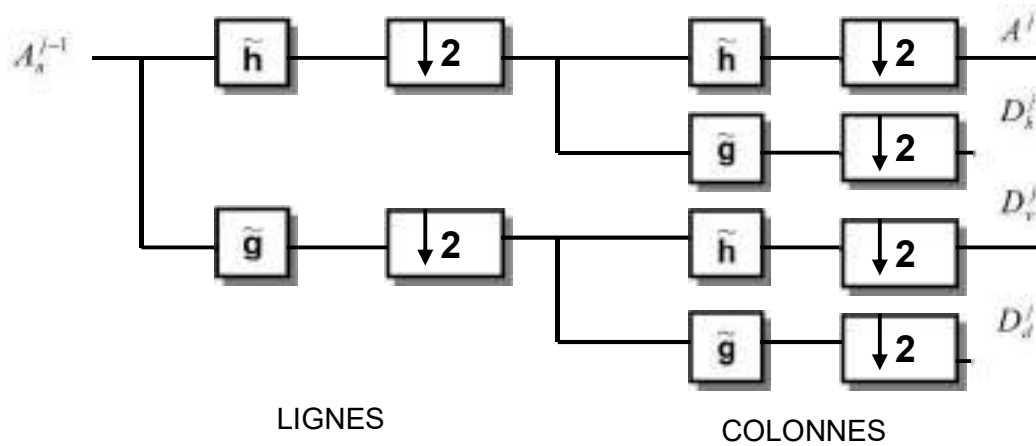


Figure 4.9. Algorithme de décomposition de Mallat à deux dimensions.

b) Reconstruction :

La reconstruction se fait d'une manière récursive. On reconstruira ainsi toutes les approximations à travers l'axe des résolutions en ajoutant à l'approximation discrète à la résolution 2^j les signaux des détails correspondants. La figure 4.10 présente l'algorithme de reconstruction de Mallat appliqué sur une image numérique.

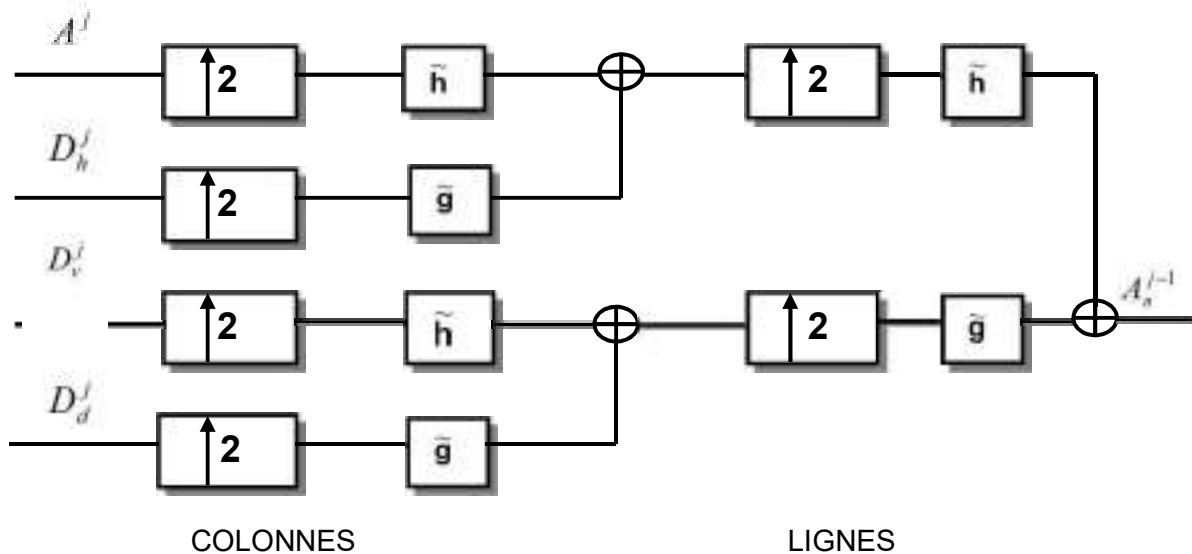


Figure 4.10. Algorithme de reconstruction exacte de Mallat

La présentation d'une analyse multirésolution s'effectue généralement selon le schéma de la figure 4.11.

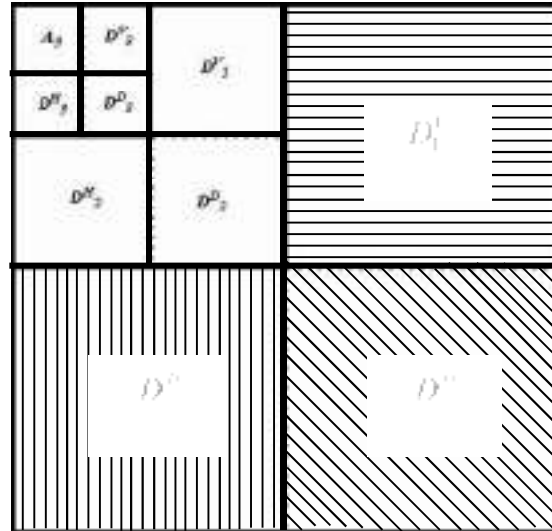


Figure 4.11. Présentation d'une analyse multirésolution à 3 niveaux à l'aide de l'algorithme de Mallat

La figure 4.12 est un exemple d'analyse multirésolution appliquée à l'image de Lena à l'aide de l'algorithme de Mallat, en utilisant comme base de décomposition l'ondelette de Haar, et pour des échelles différentes.



(1) Image originale 256x256



(2) Image à la résolution 1



(3) Image à la résolution 2



(4) Image à la résolution 3

Figure 4.12. Analyse multirésolution appliquée à l'image de Lena à l'aide de l'algorithme de Mallat.

4.5. Bases d'ondelettes orthogonales

4.5.1. Ondelettes orthogonales

a) Ondelette de Haar

Historiquement, la première base orthonormale d'ondelettes est la base de Haar [33]. L'équation de la fonction d'ondelette est :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.32)$$

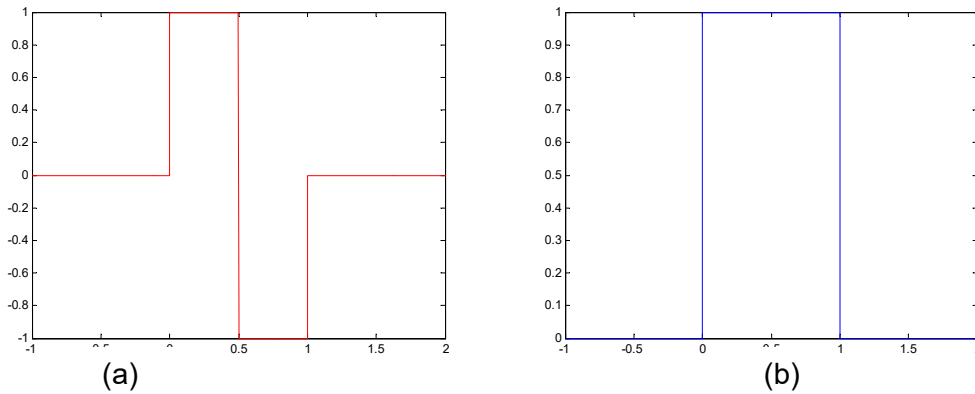


Figure 4.13. Ondelette de Haar : (a) l'ondelette. (b) la transformée de Fourier

Cette ondelette est très simple et donc facile à mettre en œuvre algorithmiquement. De plus, son support est compact : elle est bien localisée en espace.

b) Les ondelettes à support compact de Daubechies

La théorie des ondelettes à support compact a été publiée par I. Daubechies en 1988. Il a supposé une construction d'ondelettes orthogonales à support compact comme la fonction de Haar. Une ondelette de Daubechies construit une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme :

$$2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - n) \quad (4.33)$$

Les ondelettes de Daubechies, très couramment utilisées car présentant de bonnes propriétés, sont connues dans le cadre de l'analyse multirésolution comme des ondelettes orthogonales possédant une régularité choisie. Elles sont des ondelettes à support compact et non symétriques, ceci peut être problématique dans certains problèmes comme la détection de contour. Cette ondelette se construit à partir de deux coefficients $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

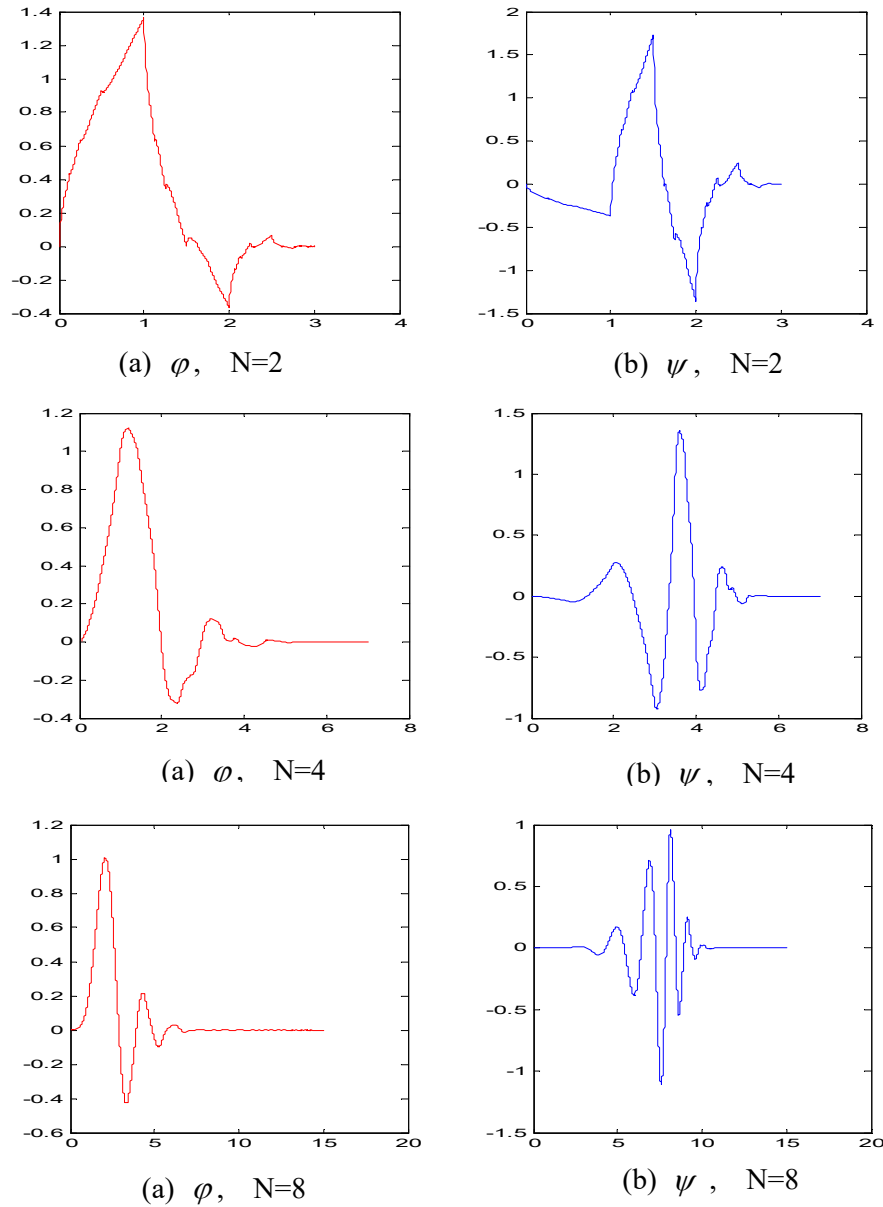


Figure 4.14. Exemple des ondelettes biorthogonales à support compact de Daubechies
(a) Fonction d'ondelette. (b) Fonction d'échelle.

4.5.2. Ondelettes biorthogonales

En traitement d'image, il est très important que les filtres d'analyse/synthèse soient symétriques. De plus l'ondelette mère doit être suffisamment régulière, et enfin, pour des raisons de coûts liés au calcul, il est souhaitable d'avoir des filtres courts. Malheureusement toutes ces conditions ne peuvent être satisfaites simultanément par une ondelette à l'exception de l'ondelette de Haar. Ainsi la contrainte de symétrie impose relativement de la contrainte d'orthogonalité en utilisant des bases biorthogonales. Les ondelettes biorthogonales ont été proposées indépendamment en 1992 par Cohen, Daubechies et Feauveau. Elles constituent une généralisation des ondelettes orthogonales. Dans le cas biorthogonal, on a deux bases duales, $\psi_{m,n}$ et $\tilde{\psi}_{m,n}$ chacune étant générée à partir de la dilatation et de la translation d'une ondelette mère ψ .

La décomposition d'un signal donné f sur une base biorthogonales est définie par :

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \tilde{\psi}_{m,n} \quad (4.34)$$

Les coefficients d'ondelettes sont alors donnés par :

$$C_{m,n}(f) = \langle f, \psi_{m,n} \rangle, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (4.35)$$

Les ondelettes biorthogonales sont à phase linéaire et à support compact et de régularité suffisante. De plus les conditions sur les filtres sont plus souples que pour les ondelettes orthogonales. Mais la transformée nécessite deux ondelettes, de plus elles peuvent avoir des régularités très différentes. Un exemple d'ondelettes biorthogonales spline est représenté dans la figure 4.15.

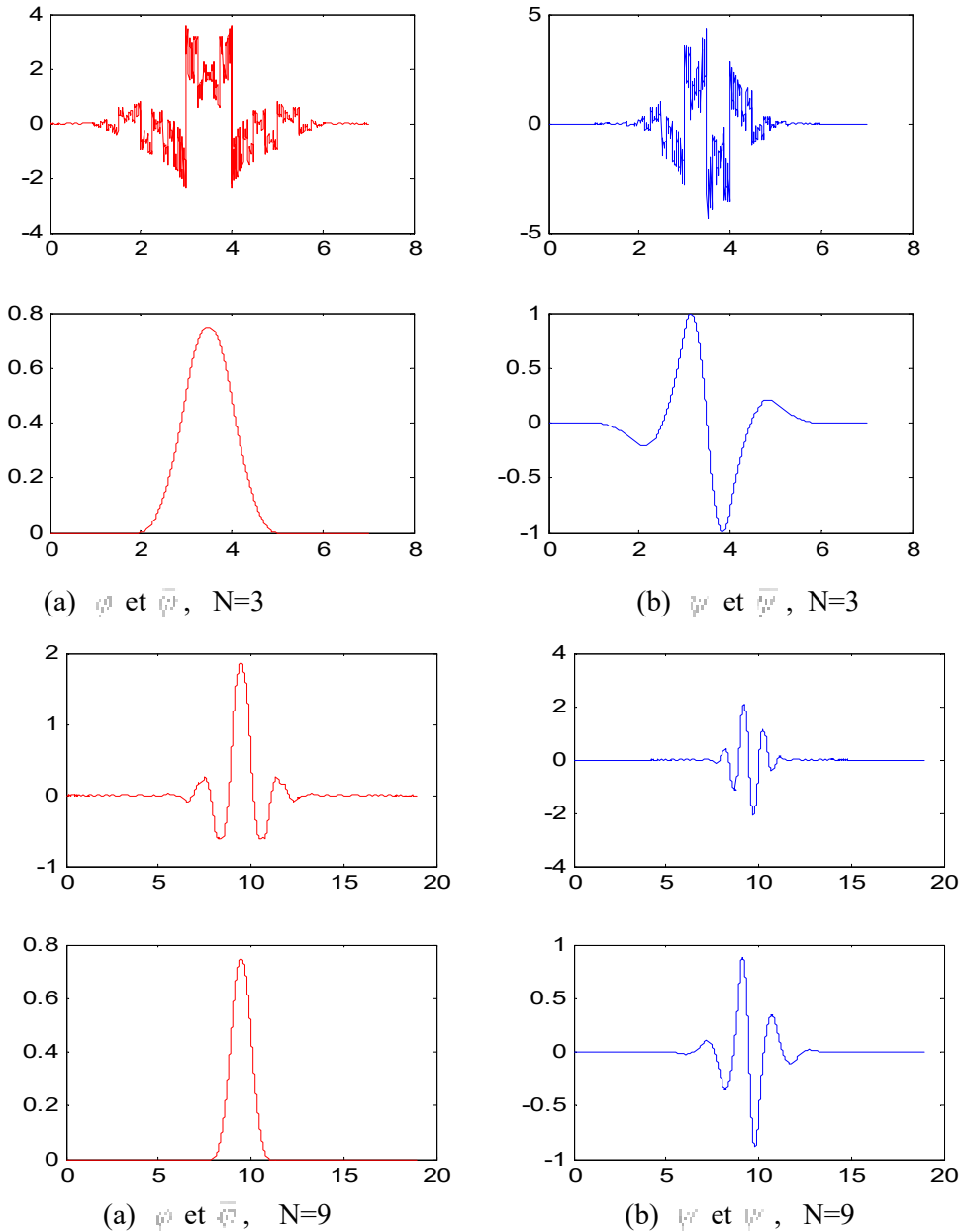


Figure 4.15. Exemple des ondelettes biorthogonales de Spline
(a) Fonction d'ondelette. (b) Fonction d'échelle.

4.6. Transformée de Wigner-Ville

Pour remédier aux inconvénients de la transformée de Fourier à courte terme et la transformée en ondelettes, des distributions temps-fréquence quadratiques ont été proposées. Ces distributions permettent une meilleure résolution temps-fréquence car elles ne sont pas contraintes par le principe d'incertitude d'Heisenberg-Gabor. La distribution de Wigner-Ville (DWV), qui peut être interpréter comme étant la distribution de l'énergie en fonction du temps et de la fréquence, est l'une de ces distributions. La DWV est définie comme suit :

$$W_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (4.36)$$

Ceci peut être réalisé, entre autres, en utilisant une transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Il s'agit principalement de la distribution de Wigner-Ville dérivée de la notion d'autocorrélation $R_x(t, \tau)$, donnée par :

$$W_x(t, f) = \int R_x(t, \tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (4.37)$$

Elle peut être interprétée comme une densité spectrale de puissance instantanée du signal. Néanmoins, des phénomènes d'interférence entre temps et fréquence peuvent entrer en jeu et réduisent l'efficacité de cette représentation.

Pour réduire ces interférences, nous serons amenés à utiliser des noyaux convolutifs

$$W_x(t, f) * \Pi(t, f) \quad (4.38)$$

La DWV donne une concentration parfaite de la fréquence instantanée en cas de modulation linéaire. Cependant, pour d'autres types de modulation, elle introduit des termes d'interférences internes dans la distribution. De plus, elle produit des interférences externes appelées "cross-terms" dans le cas de signaux multi-composants à cause de sa non-linéarité.

En pratique, une version lissée de la DWV est souvent préférée. Elle est nommée la distribution de Wigner-Ville lissée et définie par :

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (4.39)$$

Où $p(\tau)$ est la fenêtre de lissage qui permet de réduire l'amplitude des termes d'interférences.

Les techniques mentionnées ci-dessus représentent la distribution énergétique du signal dans le plan temps-fréquence (ou temps-échelle). Elles sont toutes une convolution temps-fréquence, temps-échelle d'un noyau avec la distribution de Wigner-Ville (Classe de Cohen, Classe de Rioul-Flandrin).

Références Bibliographiques

- [1]. Mori Yvon, « *Signaux aléatoires et processus stochastiques* », Lavoisier, 2014.
- [2]. N. Hermann, « *Probabilités de l'ingénieur : variables aléatoires et simulations Bouleau* », 2002.
- [3]. M. Kunt, « *Traitement Numérique des Signaux* », Dunod, Paris, 1981.
- [4]. J. M Brossier, « *Signal et Communications Numériques, Collection Traitement de Signal* », Hermès, Paris, 1997.
- [5]. M. Bellanger, « *Traitement numérique du signal : Théorie et pratique* », 8^e édition, Dunod, 2006.
- [6]. Akourgli, « *Cours Traitement Numérique du signal* », USTHB.
<http://perso.usthb.dz/~akourgli/>